Devoir maison 3 - facultatif - pour le jeudi 23 Novembre

S. Benlhajlahsen → PCSI$_1$

Sommaire

I Régime transitoire avec couplage inductif

Question 1 : À $t = 0^-$, juste avant la fermeture du l'interrupteur K, le circuit est équivalent à celui de la figure 1 puis de la figure 2. Les deux condensateurs étant identiques, ils sont équivalents à un seul condensateur de capacité $C_{\text{éq}} = \frac{C}{2}$. Comme ce condensateur est chargé, il est équivalent à un interrupteur ouvert dans son comportement donc soumis à une tension $u = E$, sa charge valant alors $q_{\text{éq}} = C_{\text{éq}}E = \frac{CE}{2}$. On en déduit alors que $q_1(0^-) = q_2(0^-) = \frac{CE}{2}$.
Autre méthode : si l'on prend le circuit équivalent de la figure 3. Chaque condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et soumis à une tension $\frac{E}{2}$. Chacun a donc une charge $\frac{CE}{2}$.

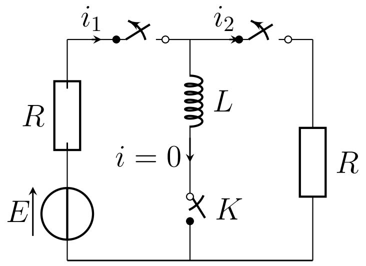

FIGURE 1 – circuit équivalent simplifié à $t = 0^-$

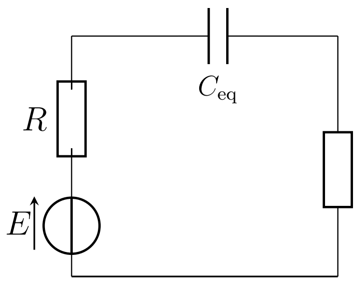

FIGURE 2 – circuit équivalent simplifié à $t = 0^-$

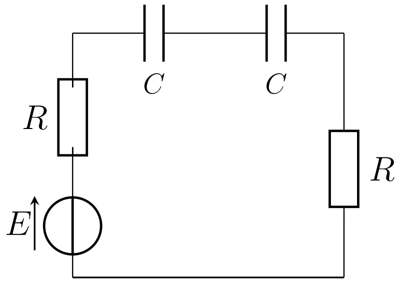

FIGURE 3 – circuit équivalent à $t = 0^-$

Question 2 : L'énergie initialement stockée dans les condensateurs vaut donc :

$$\mathcal{E}_0 = \frac{q_1^2(0^-)}{2C} + \frac{q_2^2(0^-)}{2C} = \frac{CE^2}{4} \approx 2{,}5 \times 10^{-5}\ \text{J}$$

Question 3 : La charge portée par l'armature d'un condensateur est continue donc $q_1(0^+) = \frac{CE}{2} = q_2(0^+)$. La bobine assure la continuité du courant qui la traverse donc $i(0^+) = 0$.

Question 4 : Pour $t \to \infty$, le circuit est équivalent à celui de la figure 4. On a alors directement : $q_{1\infty} = CE$ et $q_{2\infty} = 0$ et $i_\infty = 0$.

Question 5 : L'énergie emmagasinée vaut $\mathcal{E}_\infty = \frac{CE^2}{2} \approx 5{,}0 \times 10^{-5}$ J.

Question 6 : Si on écrit les lois de mailles et des nœuds, on obtient :

$$\begin{aligned} E &= Ri_1 + \frac{q_1}{C} + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ 0 &= Ri_2 + \frac{q_2}{C} - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ i &= i_1 - i_2 \end{aligned}$$

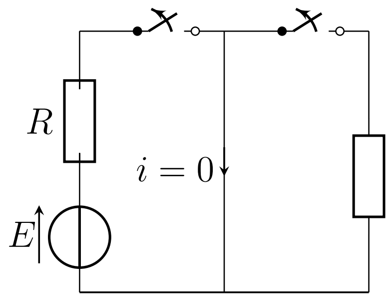

FIGURE 4 – circuit équivalent à $t \to \infty$

En se rappellant que $i_1 = \frac{dq_1}{dt}$ et $i_2 = \frac{dq_2}{dt}$, on obtient :

$$\begin{cases} E &= R\frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1}{C} + L\frac{d^2q_1}{dt^2} - L\frac{d^2q_2}{dt^2} \\ 0 &= R\frac{dq_2}{dt} + \frac{q_2}{C} + L\frac{d^2q_2}{dt^2} - L\frac{d^2q_1}{dt^2} \end{cases}$$

Soit, sous forme canonique :

$$\begin{cases} \frac{d^2q_1}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1}{LC} = \frac{d^2q_2}{dt^2} + \frac{E}{L} & (1) \\ \frac{d^2q_2}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq_2}{dt} + \frac{q_2}{LC} = \frac{d^2q_1}{dt^2} & (2) \end{cases}$$

Ce sont deux équations couplées car les variations de q_1 et q_2 ne sont pas indépendantes.

Question 7 : La combinaison linéaire $(1) + (2)$ fournit une équation vérifiée uniquement Q :

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{E}{R}$$

De même, la combinaison linéaire $(1) - (2)$ fournit une équation vérifiée uniquement q :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{2L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{2LC} = \frac{E}{2L}$$

Question 8 :

- Détermination de $Q(t)$.
  La résolution de l'équation différentielle nous donne : $Q(t) = K\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + CE$ avec $Q(0) = CE$ d'où $K = 0$. Ainsi, $Q(t) = CE$ pour $t \geqslant 0$.
- Détermination de $q(t)$.
  La résolution de l'équation différentielle nous donne : $q(t) = CE + \exp\left(-\frac{R\,t}{4L}\right) \cdot (At + B)$ car le discriminant de l'équation caractéristique est nul. Les conditions initiales sont $q(0) = 0$ et $\left[\frac{dq}{dt}\right]_{t=0} = i_10 - i_2(0) = 0$. Finalement,

$$q(t) = CE - CE\exp\left(-\frac{R\,t}{4L}\right)\left[1 + \frac{R\,t}{4\,L}\right]$$

Question 9 : L'intensité i vérifie :

$$i(t) = i_1 - i_2 = \frac{dq_1}{dt} - \frac{dq_2}{dt} = \frac{dq}{dt}$$

On obtient donc :

$$i(t) = CE\left(\frac{R^2\,t}{16L^2}\right)\exp\left(-\frac{R\,t}{4L}\right)$$

Question 10 : L'énérgie fournie par le générateur vaut :

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \int_{t=0}^{+\infty} E\, i_1 dt \\ &= \int_{t=0}^{+\infty} E\, \frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} dt\end{aligned}$$

Sachant que $q_1 = \frac{q+Q}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{1}{2}\int_{t=0}^{+\infty} E\, \mathrm{d}q + \frac{1}{2}\int_{t=0}^{+\infty} E\, \mathrm{d}Q \\ &= \frac{E}{2}\left[\int_{q=0}^{CE} \mathrm{d}q + \int_{Q=CE}^{CE} \mathrm{d}Q\right] \\ &= \frac{CE^2}{2}\end{aligned}$$

Interprétation : L'énergie électrique a augmenté de $\frac{CE^2}{4}$. Une quantité identique a été dissipée par effet Joule. L'énergie magnétique a, certes, évoluée au cours du temps mais elle est nulle à l'état initial et l'état final nulle.