Devoir maison 4 - facultatif - pour le jeudi 7 décembre 2023

S. Benlhajlahsen

Sommaire

I Fonctions spéciales (d'après Mines-Ponts MP 2023) **1**

I Fonctions spéciales (d'après Mines-Ponts MP 2023)

Bon nombre de problèmes rencontrés en physique peuvent être résolus à l'aide de « fonctions spéciales ». Ces fonctions définies mathématiquement sont implémentées dans de nombreuses bibliothèques informatiques (comme `scipy`) et peuvent être utilisées aussi simplement qu'une fonction sinus ou racine carrée qui sont elles aussi, d'une certaine manière, des fonctions spéciales et tout aussi analytiques...On rencontre bien souvent des résolutions numériques de problèmes physiques alors que l'utilisation de ces fonctions spéciales permet une résolution complète et analytique. Ce problème se propose d'illustrer l'intérêt de ces « fonctions spéciales ».

I.A La fonction de W de Lambert

I.A.1 Tir d'un projectile sans frottements

Un projectile assimilé à un point matériel de masse m est lancé à partir du sol en O avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ $(O, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ et faisant un angle θ_0 avec l'horizontale dans le référentiel terrestre supposé galiléen (voir figure 1).

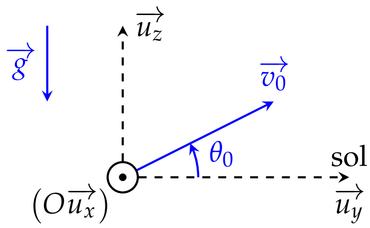

FIGURE 1 – Tir d'un projectile.

Question 1 : Rappeler la définition d'un référentiel galiléen. Dans quelle mesure le référentiel terrestre peut-il être supposé galiléen ?

Question 2 : Établir l'équation de la trajectoire. Quelle est la forme de la trajectoire ? Est-elle symétrique ?

Question 3 : Déterminer les coordonnées du sommet S de la trajectoire. Définir la portée ℓ du tir et établir son expression. Quel est l'angle θ_0 assurant un tir de portée maximale ?

I.A.2 Tir d'un projectile avec frottements

On considère maintenant que le projectile est soumis à une force de frottements proportionnelle à la vitesse : $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$ avec $\alpha > 0$.

Question 4 : Quelle est la dimension du coefficient α ? Définir à partir de α un temps caractéristique τ. Le mouvement reste-t-il plan ?

Question 5 : Établir, en fonction g, τ , $v_0 = \|\overrightarrow{v_0}\|$, θ_0 et t, les nouvelles équations horaires du mouvement.

Question 6 : Dans la situation où $t \ll \tau$, simplifier les équations horaires de la trajectoire et donner l'allure du mouvement.

Question 7 : Dans la situation où $t \gg \tau$, simplifier les équations horaires du mouvement en faisant apparaitre une vitesse limite v_∞. Où retombe le projectile ?

Question 8 : Déduire des résultats précédents, l'allure globale de la trajectoire dans une situation où le temps de vol est grand devant τ, en séparant la trajectoire en trois phases.

I.A.3 La portée maximale d'un tir avec frottement

Question 9 : Dresser le tableau de variation de la fonction $T : \chi \mapsto T(\chi) = \chi e^\chi$ et déterminer la valeur β de son minimum global.
La fonction W de Lambert est définie comme étant la fonction réciproque de T sur $[\beta, +\infty[$. Reproduire le graphe de T représenté sur la partie gauche de la figure 2 et expliquer comment en déduire l'allure de W représenté sur la partie droite.

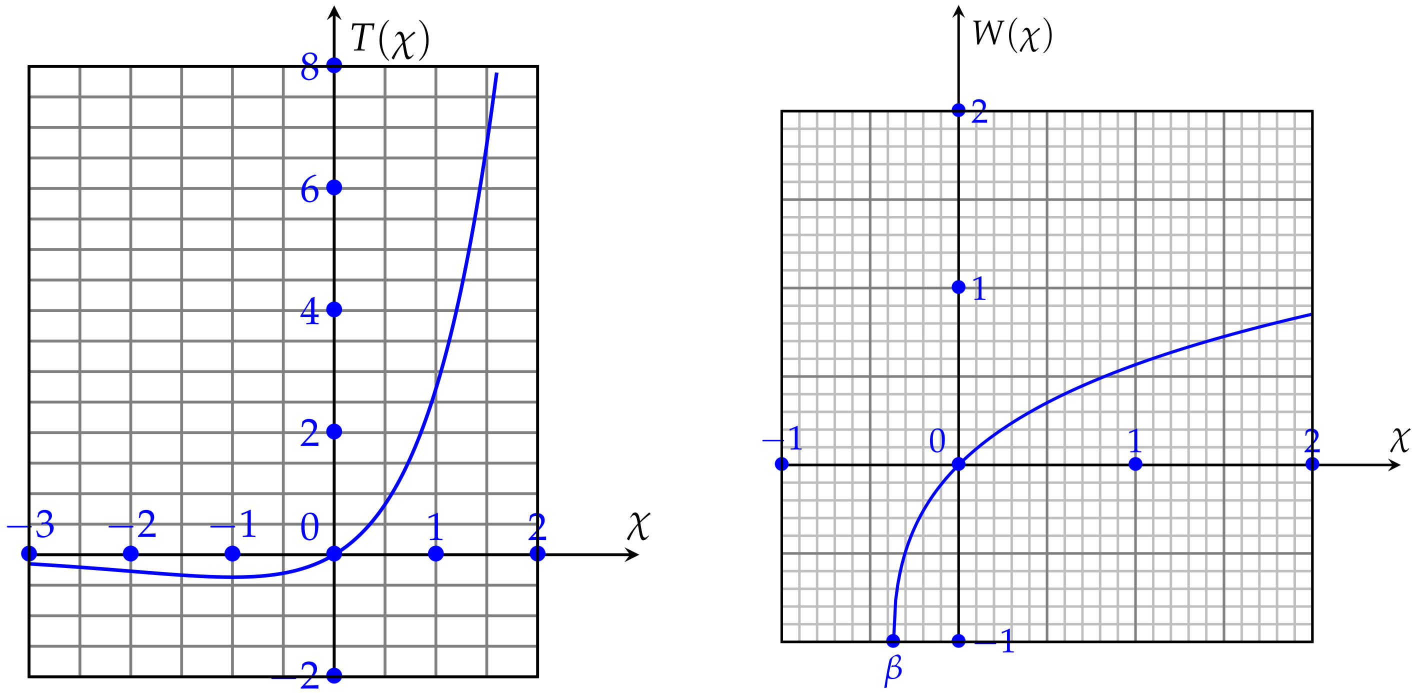

FIGURE 2 – Représentation graphique de $\chi :\mapsto T(\chi)$ (à gauche) et de $\chi :\mapsto W(\chi)$ (à droite).

Question 10 : On peut montrer que : $(\chi + \exp[W(\chi)])\, W'(\chi) = 1$. Quelle est la valeur de W(0) ?
On souhaite appliquer le schéma d'Euler explicite avec un pas `h = 0.0001` pour résoudre cette équation différentielle. Donner le code python permettant d'obtenir une représentation graphique de $W(\chi)$ sur l'intervalle $[0;2{,}5[$.

La fonction $W(\chi)$ est implémentée dans scipy. On peut l'appeler avec :

```python
from scipy.special import lambertw.
```

On montre que si $ad \neq 0$, la solution de l'équation $at + b + ce^{dt} = 0$ pour l'inconnue t est donnée par l'expression :

$$t = -\frac{b}{a} - \frac{1}{d} W\left(\frac{cd}{a} \exp\left(-\frac{bd}{a}\right)\right)$$

Question 11 : En déduire à quel instant $t^* > 0$ le projectile touche le sol. On posera $u = -\left(1 + \frac{v_0 \sin(\theta_0)}{g\tau}\right)$.

Question 12 : On rappelle que par définition $W \exp(W) = \mathrm{Id}$ où Id est la fonction identité $\chi \mapsto \chi$. En déduire que la portée est donnée par $\ell = \tau v_0 \cos(\theta_0)\left(1 - \dfrac{W\left(ue^u\right)}{u}\right)$.

En posant $\gamma = \dfrac{v_0}{v_\infty}$, on montre que l'angle initial donnant la portée maximale est :

$$\theta_{\max} = \begin{cases} \arcsin\left(\dfrac{\gamma W\left(\frac{\gamma^2-1}{e}\right)}{\gamma^2 - 1 - W\left(\frac{\gamma^2-1}{e}\right)}\right) & \text{si} \quad \gamma \neq 1 \\ \arcsin\left(\frac{1}{e-1}\right) \approx 35{,}6^\circ & \text{si} \quad \gamma = 1 \end{cases}$$

Question 13 : À l'aide de la figure 2, déterminer la valeur numérique de l'angle assurant la portée maximale pour $v_0 = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et $\tau = 0{,}4$ s.

I.B L'intégrale elliptique de première espèce

Dans toute cette partie on néglige les frottements de l'air. On étudie un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle m et d'une tige rigide de longueur ℓ et de masse négligeable, astreint à évoluer dans un plan vertical $\left(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}\right)$. On repère sa position par l'angle $\theta(t)$ (voir figure 3). À $t = 0$ on lâche le pendule sans vitesse initiale avec $\theta(t=0) = \theta_0 \in]0, \pi/2[$.

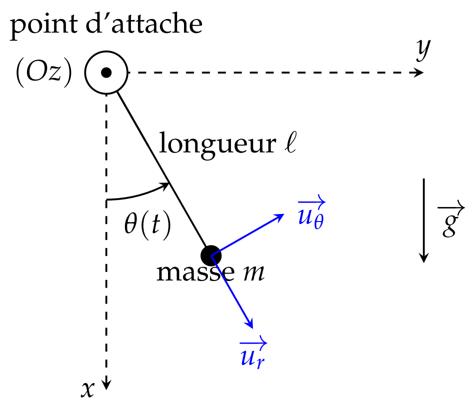

FIGURE 3 – Tir d'un projectile.

Question 14 : Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la fonction $\theta(t)$.

Question 15 : On fait l'approximation des petits angles tels que $\sin(\theta) \approx \theta$.
Établir dans ces conditions la période T_0 des oscillations.
Quelle est la propriété remarquable de la période dans le cadre de cette approximation ?

Question 16 : Déterminer l'expression générale de $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ **sans faire l'approximation des petits angles**.
En déduire que la période T des oscillations du pendule est donnée par :

$$T = \frac{2T_0}{\pi}\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2\cos(\theta) - 2\cos(\theta_0)}}$$

La propriété remarquable de la question précédente est-elle conservée ?
En effectuant le changement de variable $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin(\phi)\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$, on montre que :

$$T = \frac{2T_0}{\pi}\kappa\left(\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right) \quad \text{avec} \quad \kappa(\chi) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1 - \chi\sin^2(\phi)}}$$

On souhaite calculer l'intégrale $\kappa(\chi)$ par la méthode des rectangles médians pour un angle $\theta_0 = \pi/3$.

Question 17 : Après avoir tracé le graphe de la fonction $\chi \mapsto 1 + \sqrt{\chi}$ pour $\chi \in [0;9]$, illustrer le principe de la méthode des rectangles médians pour calculer le réel $I = \displaystyle\int_0^9 (1 + \sqrt{\chi})\,\mathrm{d}\chi$ en utilisant 9 rectangles.
Si on double le nombre de rectangles utilisés qu'en est-il de la différence entre la valeur exacte de I et la valeur approchée

numériquement par la méthode des rectangles médians ?

Question 18 : Recopier et compléter le code suivant permettant de calculer $\kappa(\chi)$ par la méthode des rectangles médians.

```
import math as m
def f(x, phi):
    return ...

S = 0
N = 100
a  = 0.
b = m.pi/2
pas = ...
theta_0 = m.pi/3
x = m.sin(theta_0)**2
for i in range(N):
    phi = ...
    S =

print(pas*S)
```

Remarque : La fonction $\chi \mapsto \kappa(\chi)$ est nommée intégrale elliptique complète de première espèce. Elle est implémentée dans `scipy`. On peut l'appeler directement avec :

```
from scipy.special import ellipk
```

Question 19 : En utilisant la figure 4, pour un pendule tel que $T_0 = 1$ s, évaluer T lorsque $\theta_0 = 50°$.
Quel est le décalage temporel induit par la prise en compte de l'approximation des petits angles si l'on envisage de mesurer une heure ?

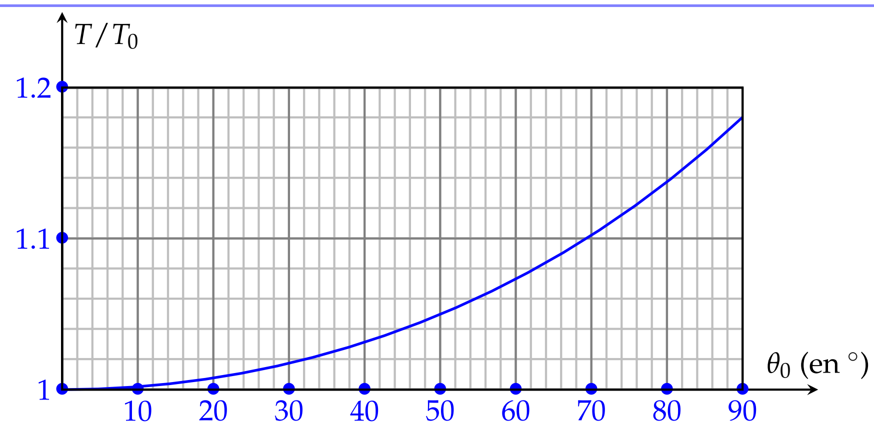

FIGURE 4 – Représentation graphique de $\theta_0 \mapsto T(\theta_0)/T_0$.

Remarque : Au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, les puissances maritimes désiraient posséder des instruments précis pour la mesure du temps afin de faciliter la navigation (notamment pour déterminer la longitude). Les rois de France et d'Angleterre avaient offert des prix importants à qui serait capable de réaliser un chronomètre précis, fiable et utilisable en mer.
Christian Huygens (1629-1695) motivé par ce problème étudia le pendule conique et le pendule oscillant entre deux lames courbes. Il parvint à démontrer que des lames en forme de cycloïde assurent l'isochronisme rigoureux des oscillations.

Question 20 : Dans quelle situation courante rencontre-t-on la cycloïde ?