Devoir maison 5 - facultatif - Pour le 11 janvier 2023

S. Benlhajlahsen

Sommaire

I Microscope à force atomique

I.A mode contact - hystérésis

Question 1 : La pointe est soumise à l'action de la surface (force $\overrightarrow{F}$) et à la tension du ressort $\overrightarrow{T}$. La longueur du ressort est $d - z$, sa longueur à vide est nulle et le vecteur $-\overrightarrow{u_z}$ indique le sens de son allongement. Ainsi, $\overrightarrow{T} = +k \cdot (d - z)\,\overrightarrow{u_z}$. On se place dans tout le problème dans le référentiel du laboratoire, galiléen, l'équilibre de la pointe se traduit par :

$$F(z_{\text{éq}}) + k \cdot (d - z_{\text{éq}}) = 0$$

avec $z_{\text{éq}}$ la cote de la position d'équilibre.

Question 2 : On se place au voisinage de la position d'équilibre de cote $z_{\text{éq}}$ soit $z = z_{\text{éq}} + \varepsilon$ avec $|\varepsilon| \ll |z_{\text{éq}}|$. La loi de la quantité de mouvement en projection sur l'axe (Oz) devient :

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} &= F(z) + k(d - z) \\
m\frac{\mathrm{d}^2 (z_{\text{éq}} + \varepsilon)}{\mathrm{d}t^2} &= F(z_{\text{éq}} + \varepsilon) + k(d - z_{\text{éq}} - \varepsilon) \\
m\frac{\mathrm{d}^2 \varepsilon}{\mathrm{d}t^2} &\approx \underbrace{F(z_{\text{éq}}) + k(d - z_{\text{éq}})}_{=0} + \left[\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right]_{z=z_{\text{éq}}} \cdot \varepsilon - k \cdot \varepsilon \\
m\frac{\mathrm{d}^2 \varepsilon}{\mathrm{d}t^2} &= -\left(\left[\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}z^2}\right]_{z=z_{\text{éq}}} + k\right) \cdot \varepsilon
\end{aligned}$$

L'équilibre est stable si le système oscille spontanément après toute perturbation faible, ce qui donne la condition de stabilité :

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}z^2}\right]_{z=z_{\text{éq}}} + k > 0$$

Question 3 : Le minimum de U correspond à une cote z_1 telle que :

$$\left[\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z}\right]_{z_1} = 0 \text{ et } \left[\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}z^2}\right]_{z_1} > 0$$

On trouve alors :

$$z_1 = \left(\frac{7 \cdot A}{B}\right)^{1/6} \approx 2{,}03 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

L'annulation de U se fait pour :

$$z_2 = \left(\frac{A}{B}\right)^{1/6} \approx 1{,}47 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

Question 4 : On a directement $F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z} = \frac{7 \cdot A}{z^8} - \frac{B}{z^2}$. U et F sont représentées en figures 1 et 2.

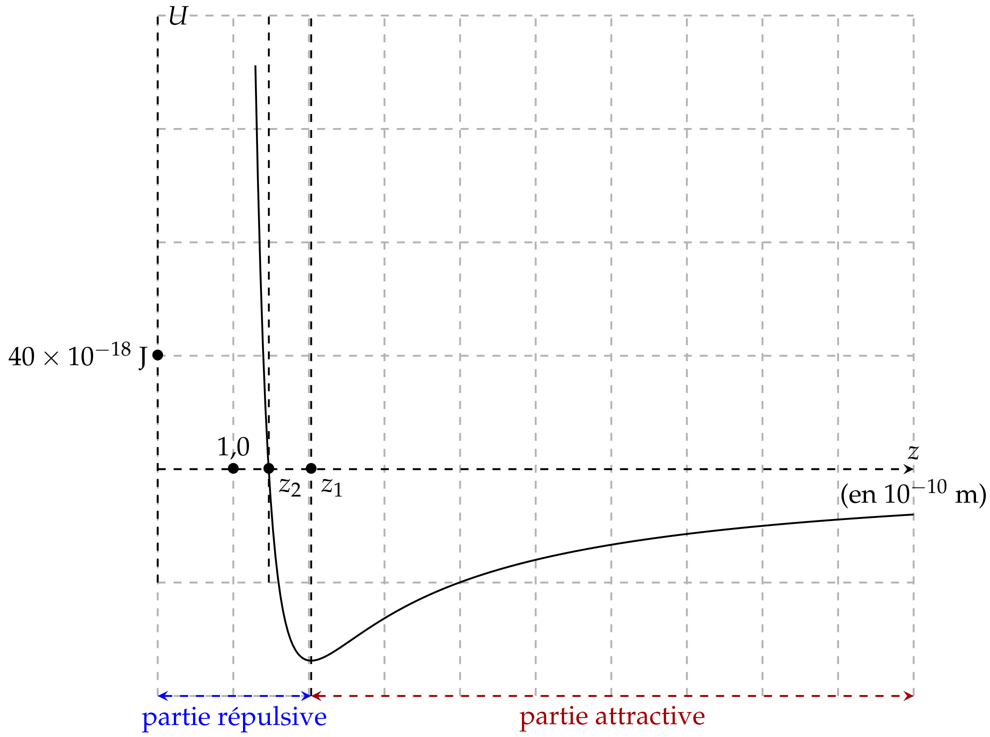

FIGURE 1 – Courbe représentative de l'énergie potentielle U. On fera attention aux unités des deux axes.

Question 5 : On peut comparer les deux termes de l'énergie potentielle :

$$\left|\frac{A/z^7}{B/z}\right| = \frac{A}{Bz^6}$$

Aux courtes distances, ce rapport devient grand devant 1, ce qui signifie que le terme A/z^7 domine. Ce premier terme correspond aux interactions répulsives.

Question 6 : Le terme en A correspond à $F > 0$ et U décroissante donc à une interaction répulsive. Le terme en B correspond à $F < 0$ et U croissante donc à une interaction attractive.

Question 7 : La conditions d'équilibre correspond à l'intersection entre la courbe représentative de F et de la droite d'équation $y = k \cdot (z - d)$ (voir figure 3). L'intersection entre les deux courbes dans cet exemple trois positions d'équilibre possible.

Question 8 : Pour que tous les équilibres possibles soient stables, il faut que :

$$\forall z_{\text{éq}}, \quad \left[\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}z^2}\right]_{z=z_{\text{éq}}} + k > 0$$

Soit encore,

$$\forall z_{\text{éq}}, \ k > -\left[\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}z^2}\right]_{z=z_{\text{éq}}}$$

Il suffit, pour cela, que k soit supérieur au maximum de $-\left[\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}z^2}\right]_{z=z_{\text{éq}}}$ et donc au minimum de $\left[\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}z^2}\right]_{z=z_{\text{éq}}}$. Un calcul montre que $\left[\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}z^2}\right]_{z=z_{\text{éq}}}$ est minimum pour $z = z_{\text{min}} = \sqrt[6]{\frac{84 \cdot A}{B}}$. Il suffit donc que :

$$k > k_c = \frac{2 \cdot B}{z_{\text{min}}^3} - \frac{56 \cdot A}{z_{\text{min}}^9} \approx 0{,}46 \ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$$

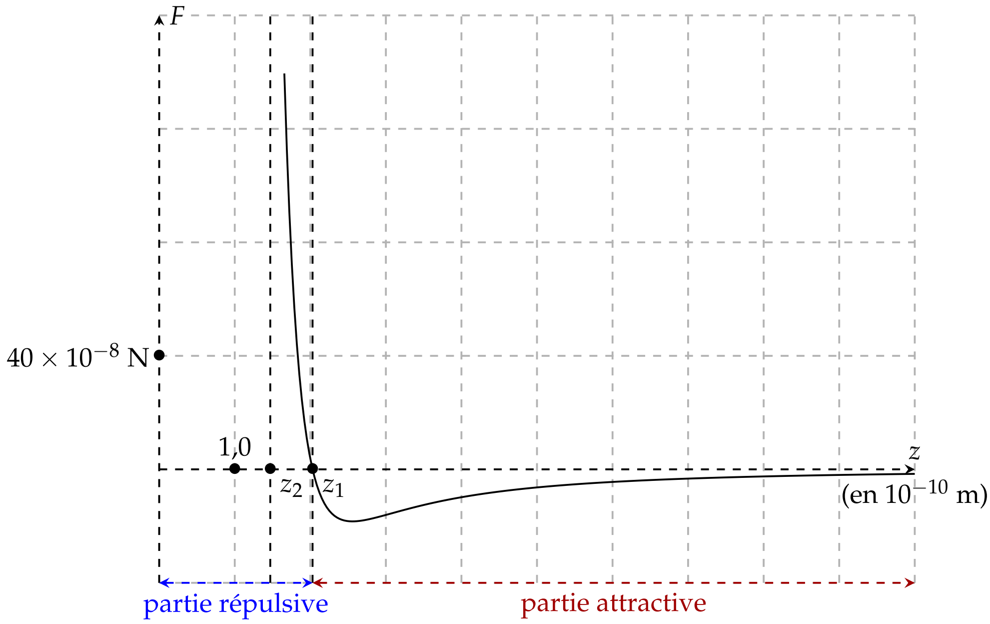

FIGURE 2 – Courbe représentative de la force F. On fera attention aux unités des deux axes.

Question 9 : L'équilibre se fait pour $z = z_{éq}$ dans la partie répulsive de force $F(z)$ donc $F(z_{éq}) > 0$. De plus, le tracé graphique montre que, dans ce cas, $\left[\frac{dF}{dz}\right]_{z_{éq}} < 0$ donc $\left[\frac{d^2U}{dz^2}\right]_{z_{éq}} > 0$ donc $k + \left[\frac{d^2U}{dz^2}\right]_{z_{éq}} > 0$ ce qui prouve la stabilité de l'équilibre.

Question 10 : Si on part de la position d'équilibre $z_{éq}$ alors $F(z_{éq}) + k\left(d - z_{éq}\right) = 0$. Si d varie Δd (faible), la pointe se stabilisera en $z_{éq} + \Delta z$ tel que :

$$\begin{aligned}
0 &= F(z_{éq} + \Delta z) + k\left(d + \Delta d - z_{éq} - \Delta z\right) \\
0 &\approx F(z_{éq}) + \left[\frac{dF}{dz}\right]_{z_{éq}} \cdot \Delta z + k\left(d - z_{éq}\right) + k\Delta d - k\Delta z \\
0 &\approx \left[\frac{dF}{dz}\right]_{z_{éq}} \cdot \Delta z + k\Delta d - k\Delta z
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\Delta z = \frac{\Delta d}{1 - \frac{1}{k}\left[\frac{dF}{dz}\right]_{z=z_{éq}}}$$

Application numérique : $z_{éq} = 0{,}1$ nm, $F(z_{éq}) = 0{,}7 \times 10^{-7}$ N > 0 et $\frac{1}{k}\left[\frac{dF}{dz}\right]_{z=z_{éq}} \approx -55{,}8$ (sans unité).

Question 11 : Lorsqu'on déplace la pointe au-dessus de la surface, celle-ci est plus ou moins proche de la surface suivant l'intensité de la force atomique. Supposons maintenant que la pointe est à une distance $z_{éq}$ d'un point de la surface. Si on reste au-dessus de ce point mais que d varie de Δd alors $z_{éq}$ varie de Δz. Autrement dit, si l'erreur sur la position du levier est faible (par exemple, $\Delta d = 1.0 \times 10^{-1}$ nm) alors $|\Delta z| \approx 2{,}0 \times 10^{-3}$ nm. Ainsi, celle-ci reste à distance quasi-constante de la surface. En déplaçant horizontalement la pointe au-dessus de la surface, on peut accéder à la topologie de la surface.

Question 12 : On suppose que $k < k_C$ donc toutes les positions d'équilibre ne sont pas forcément stables. Sur la courbe de la figure 3, il y a trois positions d'équilibre.
La position z_A est stable. En effet, si on fait croître un peu z, $|F| > |k \cdot (z - d)|$ donc la force F l'emporte en étant attractive et la pointe revient vers l'équilibre. Inversement, si on fait décroître un peu z, $|F| < |k \cdot (z - d)|$ donc la tension du ressort l'emporte en étant répulsive et la pointe revient vers l'équilibre. Un raisonnement similaire montrerait que B est instable et C est stable.

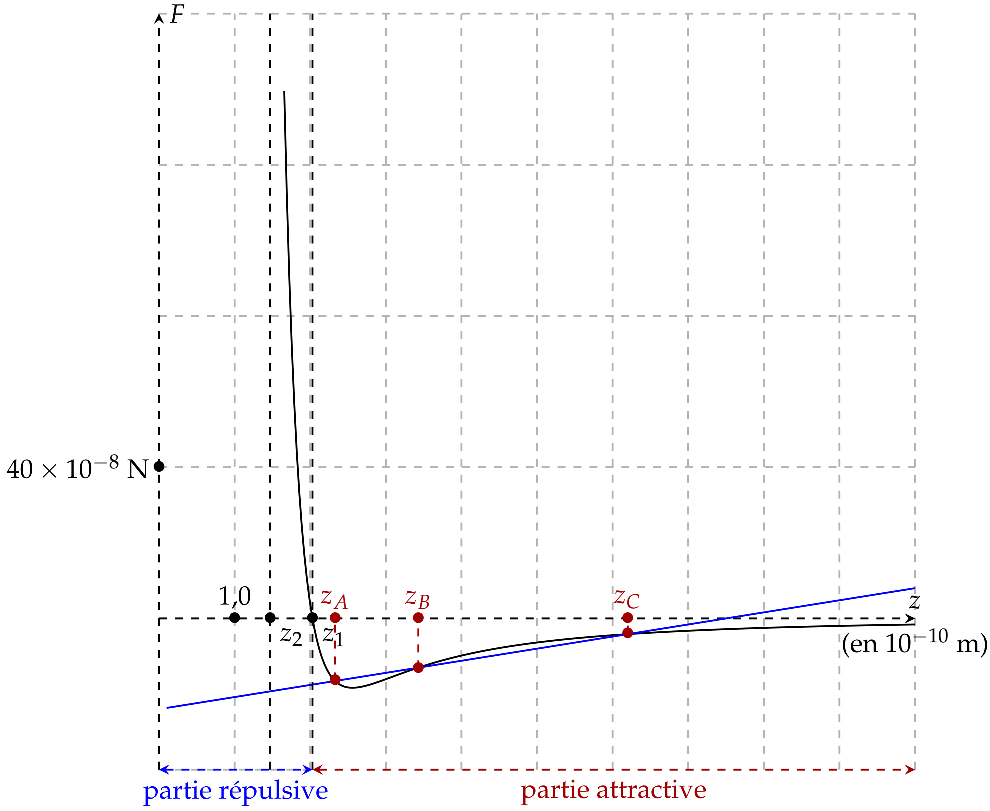

FIGURE 3 – On a pris dans cet exemple $k = 0{,}2\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}$ et $d = 7{,}5 \times 10^{-10}$ m.

Dans une **phase d'approche** (voir figure 4), on diminue progressivement d. La pointe ne se calera en pratique que sur une position d'équilibre stable. Pour une grande valeur de d (courbe bleue), l'équilibre se fera en A loin de la surface. A partir d'une valeur critique d_1 (coube verte), la pointe se rapproche brutalement de la surface en "sautant" de la position B (instable) à la position C (stable). Ensuite (courbe violette), la pointe continue à se rapprocher progressivement de la surface (position D).

Question 13 : Dans une **phase de retrait** (voir figure 5), on augmente progressivement d. Pour une faible valeur de d (courbe bleue), l'équilibre se fera en R proche de la surface. A partir d'une valeur critique d_2 (coube verte), la pointe s'éloigne brutalement de la surface en "sautant" de la position S (instable) à la position V (stable). Ensuite (courbe violette), la pointe continue à se rapprocher progressivement de la surface (position V).

Question 14 : Ces considérations sont en accord avec la courbe de la figure 6.

Question 15 : C'est le phénomène d'hystérésis. C'est un phénomène qui voit apparaître un retard de l'effet sur la cause.

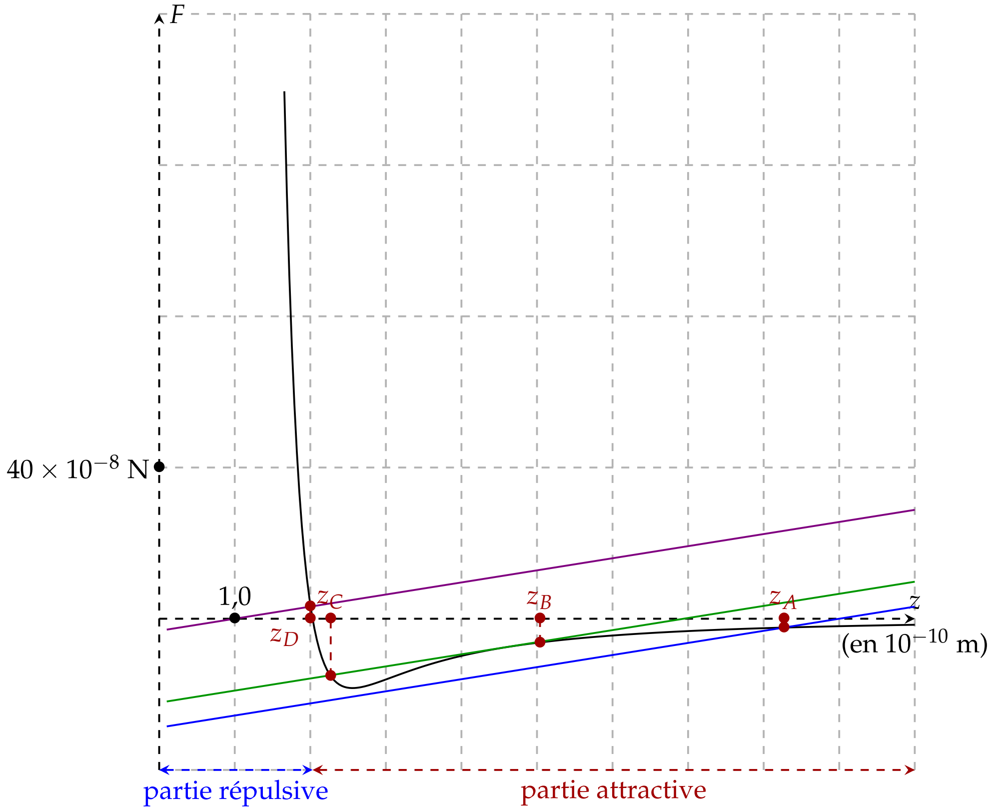

FIGURE 4 – Phase d'apporoche. On a pris dans cet exemple $k = 0{,}2\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$ et trois valeurs de d : $d = 9{,}0 \times 10^{-10}$ m (en bleu), $d = 6{,}94 \times 10^{-10}$ m (en vert) et $d = 1{,}0 \times 10^{-10}$ m (en violet).

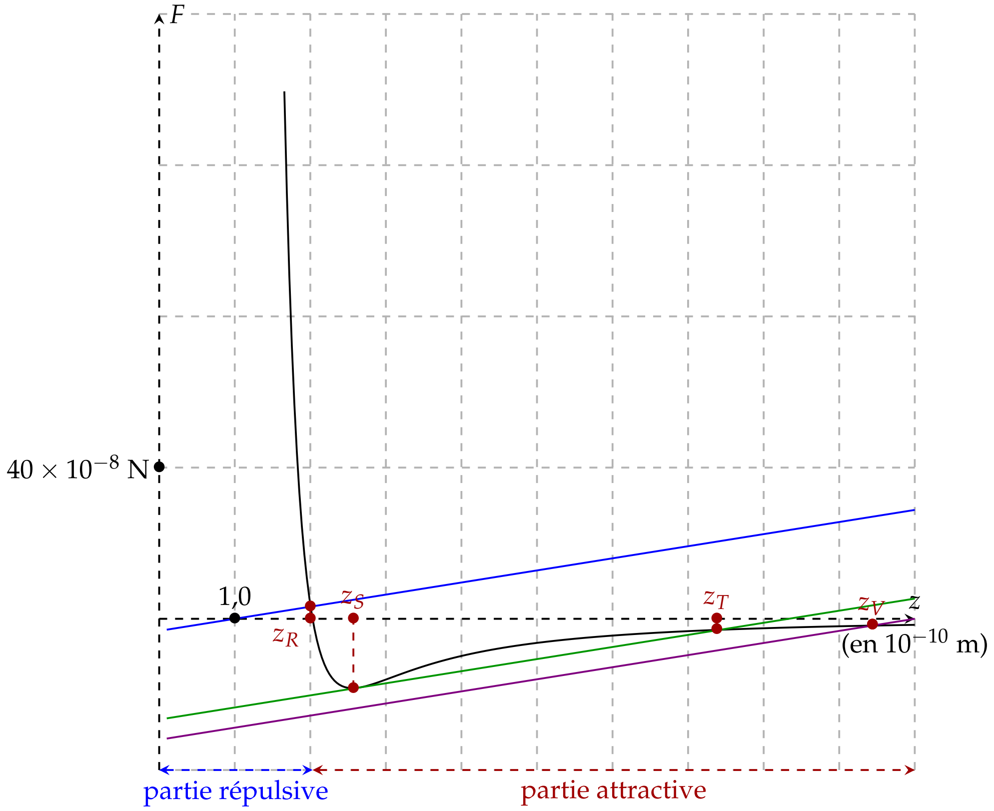

FIGURE 5 – Phase de retrait. On a pris dans cet exemple $k = 0{,}2\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$ et trois valeurs de d : $d = 1{,}0 \times 10^{-10}$ m (en bleu), $d = 8{,}33 \times 10^{-10}$ m (en vert) et $d = 10{,}0 \times 10^{-10}$ m (en violet).

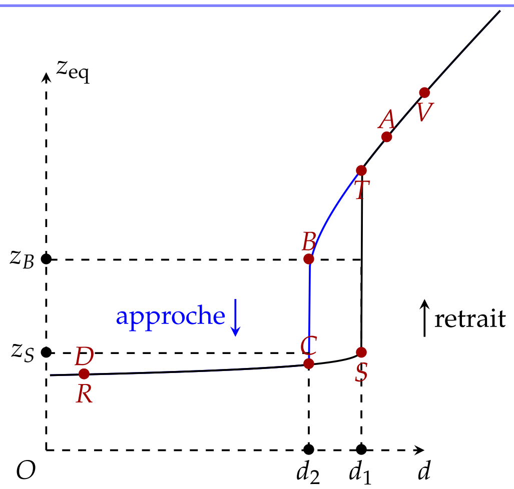

FIGURE 6