



## Sommaire

### I Effets capacitifs

1

### I Effets capacitifs

#### I.A Etude du condensateur plan

##### I.A.1 champ créé par une plaque infinie chargée uniformément en surface

Q1. La distribution de charges présente une invariance par translation selon  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_z$ . Ainsi,  $\vec{E}(M) = \vec{E}(y)$ .

Tout plan contenant la droite  $(M, \vec{u}_y)$  est un plan de symétrie de la distribution de charges donc  $\vec{E}(M)$  appartient à chacun de ces plans puis  $\vec{E}(M) = E(y) \vec{u}_y$ .

Q2. On applique le théorème de Gauss à une cylindre droit de base  $S$  et de hauteur  $|2z|$  (voir figure 1). Le plan chargé est un plan de symétrie du cylindre.

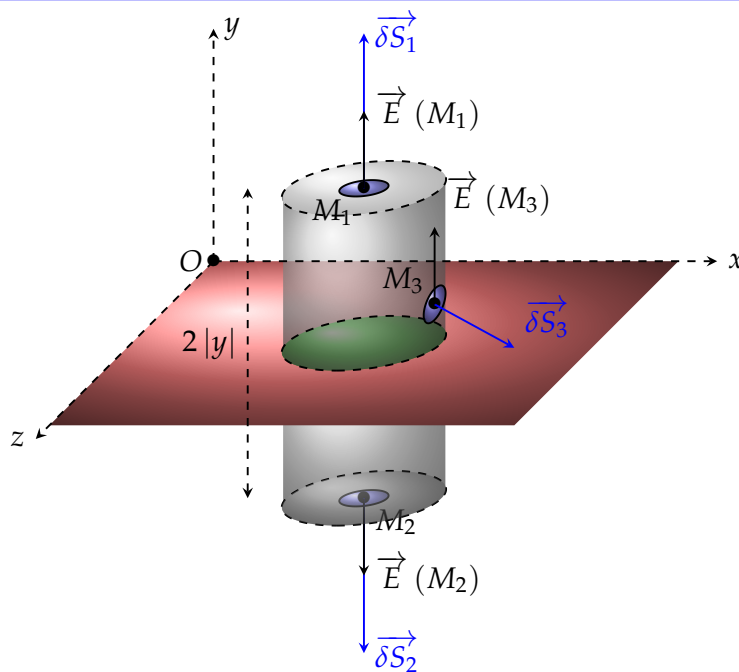


FIGURE 1

Le théorème de Gauss s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{Q_{\text{intérieure}}}{\epsilon_0} \\ \iint_{\text{surface-fermée}} \vec{E} \cdot \vec{\delta S} &= \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \\ \iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot \vec{\delta S}_1 + \iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot \vec{\delta S}_2 + \iint_{\Sigma_{\text{laterale}}} \vec{E} \cdot \vec{\delta S}_{\text{laterale}} &= \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \\ 2E(y)S &= \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$\text{Finalement, } \vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_y & \text{si } y > 0 \\ \text{non-défini} & \text{si } y = 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_y & \text{si } y < 0 \end{cases} .$$

### I.A.2 capacité du condensateur plan

Q3. La superposition des champs entre les deux plaques vaut :  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_y$  et  $\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{0}$ .

Q4. La différence de potentiel entre les armatures fixe et mobile vaut :

$$\begin{aligned} U &= V(y=0) - V(y=e) = \int_{y=e}^0 dV \\ \frac{Q}{C} &= \int_{y=e}^0 -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\ \frac{\sigma S}{C} &= \int_{y=0}^e \frac{\sigma}{\epsilon_0} dy = \frac{\sigma e}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$\text{Soit, } C = \frac{\epsilon_0 S}{e}.$$

Q5. Un élément de surface  $\delta S$  de l'armature mobile porte une charge  $\delta q = -\sigma \delta S$  et subit de la part de l'armature fixe une force :

$$\vec{\delta F} = \delta q \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_y = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \cdot \delta S \vec{u}_y = -P_{\text{elec}} \cdot \delta S \vec{u}_y$$

où  $P_{\text{elec}} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$  est homogène à une force par unité de surface. C'est la pression électrostatique.

Q6. Quel que soit le signe de  $\sigma$ , cette force est attractive.

Q7. Si on intègre sur la surface, on obtient :

$$\vec{F} = F \vec{u}_y = -\frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0} \vec{u}_y$$

Q8. Application numérique :  $\sigma \approx 8.85 \times 10^{-6} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $P_{\text{elec}} \approx 4.4 \text{ Pa}$  et  $F \approx 0.00044 \text{ N} \approx 4.4 \times 10^4 \text{ N}$ .

### I.A.3 Energie électrostatique

Q9. Si on se rappelle que le champ n'est non nul qu'à l'intérieur du condensateur, alors :

$$\begin{aligned} W_{\text{elec}} &= \iiint_{\text{intérieur}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \delta V \\ &= \int_{y=0}^e \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0} \right)^2 S dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2 S e}{\epsilon_0} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon_0 S}{e} \cdot \frac{\sigma^2 e^2}{\epsilon_0^2} = \frac{1}{2} C U^2 \end{aligned}$$

Q10. Supposons qu'un opérateur applique une force  $\vec{F}$  à la plaque mobile de sorte que l'épaisseur varie de  $\Delta e$  entre 2 positions d'équilibre. Dans ce cas, le théorème de l'énergie cinétique pour ce chemin s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= W_{\text{opérateur}} + W_{\text{force-élec}} \\ 0 &= F \Delta e - \frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0} \Delta e \end{aligned}$$

Soit encore,  $F = \frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0}$ . Si  $U$  est maintenue constante alors  $\sigma$  l'est aussi, ce qui donne :

$$F = \frac{\partial}{\partial e} \left[ \frac{\sigma^2 S e}{2\epsilon_0} \right] = \frac{\partial W_{\text{elec}}}{\partial e}$$

## I.B moteur linéaire

### I.B.1 Actionneur électrostatique linéaire

Q11. Tout se passe comme si les condensateurs de largeur  $L_x$  et  $L - L_x$  constituaient deux condensateurs en parallèle. En effet, ils sont soumis à la même tension  $U$ .

Q12. On se rappelle que deux condensateurs de capacités  $C_1$  et  $C_2$  en parallèle ont une capacité équivalente  $C_{\text{équivalente}} = C_1 + C_2$  avec

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r L_z \cdot L_x}{e} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r L_z \cdot x}{e}$$
$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r L_z \cdot (L - L_x)}{e} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r L_z \cdot (L - x)}{e}$$

La capacité équivalente vaut :

$$C_{\text{équivalente}} = C(x) = \frac{\epsilon_0 L_z}{e} \cdot (L + x[\epsilon_r - 1])$$

Q13. Dans ce cas, il faudrait prendre  $L_x = 2L - x$

Q14. On a directement :  $F_x = \frac{\epsilon_0 L_z U^2}{2e} \cdot (\epsilon_r - 1)$ .

Q15. applications numériques :

- $\epsilon_r = 1 : F_x = 0$ ;
- Mica :  $F_x \approx 1,77 \times 10^{-5}$  N;
- Silicium  $F_x \approx 3,2 \times 10^{-5}$  N.

### I.B.2 Étude dynamique du micro-moteur linéaire

Q16. On a clairement  $x_{\text{max}} = L$

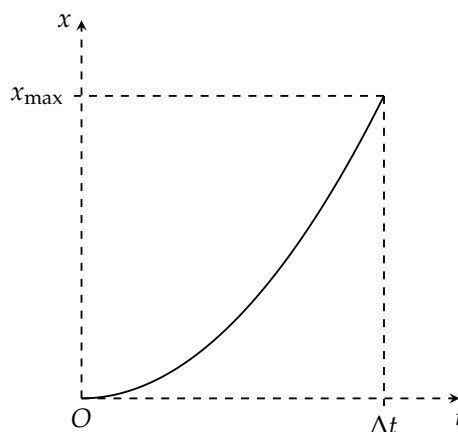
Q17. La force a pour expression :  $F_x = \frac{BU^2}{2} \approx 4,4 \times 10^{-4}$  N.

Q18. L'application de la seconde loi de Newton au diélectrique en translation nous donne :  $M\ddot{x} = F_x$ . En tenant compte des conditions initiales, il vient :  $x(t) = \frac{BU^2 t^2}{2M}$ .

Q19. La charge de l'armature positive vaut :  $q(t) = C(x)U = \left[ A + \frac{B^2 U^2 t^2}{2M} \right] \cdot U$ .

Q20. Le courant fournit par la source vaut :  $i = \frac{dq}{dt} = \frac{B^2 U^3 t}{M}$ .

Q21. Pour aller de  $x = 0$  à  $x_{\text{max}} = L$ , cela prend une durée :  $\Delta t = \sqrt{\frac{2ML}{BU^2}} \approx 1,8$  ms. Cela donne une évolution de  $x(t)$  :



Q22. Le courant maximal vaut :  $i_{\text{max}} = \frac{B^2 U^3 \Delta t}{M} \approx 1,0$  mA.

Q23. La puissance électrique fournit au condensateur vaut :  $p_e(t) = v(t) \cdot i(t) = \frac{B^2 U^4 t}{M}$ .

Q24. Dans la phase de mouvement  $x \in ]0, L[$ , la force dépend du carré de  $U$ . Ainsi, changer la valeur de  $U$  ne peut pas changer le signe de  $F_x$ .

Q25. On peut prendre un ressort dont on ajuste la valeur de  $\ell_0$  et de  $k$ .

### I.C digital micromirror device

#### I.C.1 condensateur diédrique

Q26. La relation entre le potentiel  $V$  et le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}(V)$$

Comme le champ est selon  $\vec{u}_\theta$  alors  $\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$  et le potentiel ne dépend que de  $\theta$ . On a, de plus :

$$E(r, \theta) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dV}{d\theta}$$

Q27. Le flux du champ électrique sortant de ce volume vaut :

$$E(r, \theta + d\theta) dr dz - E(r, \theta) dr dz$$

La charge intérieure à ce volume est nulle ce qui implique que :

$$E(r, \theta + d\theta) - E(r, \theta) = \frac{\partial E}{\partial \theta} d\theta = 0$$

On en déduit que le champ électrique ne dépend pas de  $\theta$  mais uniquement de  $r$ . De plus,

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

Ce qui assure que  $\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{dV}{d\theta} = cte$ .

Q28. Si on remarque que :

$$U = V(\theta = 0) - V(\theta = \alpha) = \int_\theta^0 dV = -cte \cdot \alpha$$

On en déduit rapidement que :

$$\frac{dV}{d\theta} = -\frac{U}{\alpha} \text{ et } E = -\frac{1}{r} \cdot \frac{dV}{d\theta} = \frac{U}{r\alpha}$$

Q29. Comme  $E = \frac{U}{r\alpha} = \frac{\sigma_1(r)}{\epsilon_0}$ , on en déduit que  $\sigma_1(r) = \frac{\epsilon_0 U}{r\alpha}$ .

Q30. La tension  $U$  vérifie alors :

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \cdot \int_{z=0}^L \int_{r=D_i}^{D_e} \sigma_1(r) dr dz$$

Ce qui donne bien :

$$C = \frac{\epsilon_0 L}{\alpha} \cdot \ln \left( \frac{D_e}{D_i} \right)$$

REMARQUE : ce résultat se retrouve comme à la question Q9 à partir de l'énergie électrique.

#### I.C.2 modèle électrostatique du micromiroir

Q31. Dans les deux cas, il faut adapter les valeurs de  $D_i$  et  $D_e$  :

- dans le cas du condensateur de gauche  $D_e = -\frac{x_0}{\sin(\alpha)} + \frac{(l+l_0)}{\cos(\alpha)}$  et  $D_i = \frac{x_0}{\sin(\alpha)} + \frac{l_0}{\cos(\alpha)}$  ;
- dans le cas du condensateur de droite  $D_e = \frac{x_0}{\sin(\alpha)} + \frac{(l+l_0)}{\cos(\alpha)}$  et  $D_i = -\frac{x_0}{\sin(\alpha)} + \frac{l_0}{\cos(\alpha)}$  (on doit multiplier alors le résultat par  $-1$  à cause de l'orientation.).

Q32. Dans les deux cas, il faut faire un développement au voisinage de  $\alpha = 0$  de ces expressions :

- Pour le condensateur de droite :

$$\begin{aligned}
 C(\alpha) &= \frac{\epsilon_0 L}{\alpha} \ln \left( \frac{x_0 \cos(\alpha) - l_0 \sin(\alpha)}{x_0 \cos(\alpha) - (l + l_0) \sin(\alpha)} \right) \\
 &= \frac{\epsilon_0 L}{\alpha} \cdot \left[ \ln \left( 1 - \frac{l_0 \sin(\alpha)}{x_0 \cos(\alpha)} \right) - \ln \left( 1 - \frac{(l_0 + l) \sin \alpha}{x_0 \cos(\alpha)} \right) \right] \\
 &\approx \frac{\epsilon_0 L}{\alpha} \cdot \left[ \ln \left( 1 - \frac{l_0 \alpha}{x_0} \right) - \ln \left( 1 - \frac{(l_0 + l) \alpha}{x_0} \right) \right] \\
 &\approx \frac{\epsilon_0 L}{\alpha} \cdot \left[ -\frac{l_0 \alpha}{x_0} + \frac{(l_0 + l) \alpha}{x_0} \right] \\
 &\approx \frac{\epsilon_0 L l}{x_0}
 \end{aligned}$$

- Pour le condensateur de gauche :

$$\begin{aligned}
 C^*(\alpha) &= \frac{\epsilon_0 L}{\alpha} \ln \left( \frac{x_0 \cos(\alpha) + (l + l_0) \sin(\alpha)}{x_0 \cos(\alpha) + l_0 \sin(\alpha)} \right) \\
 &= \frac{\epsilon_0 L}{\alpha} \cdot \left[ \ln \left( 1 + \frac{(l + l_0) \sin(\alpha)}{x_0 \cos(\alpha)} \right) - \ln \left( 1 + \frac{l_0 \sin \alpha}{x_0 \cos(\alpha)} \right) \right] \\
 &\approx \frac{\epsilon_0 L}{\alpha} \cdot \left[ \ln \left( 1 + \frac{(l + l_0) \alpha}{x_0} \right) - \ln \left( 1 + \frac{l_0 \alpha}{x_0} \right) \right] \\
 &\approx \frac{\epsilon_0 L}{\alpha} \cdot \left[ \frac{(l + l_0) \alpha}{x_0} - \frac{l_0 \alpha}{x_0} \right] \\
 &\approx \frac{\epsilon_0 L l}{x_0}
 \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on obtient numériquement<sup>1</sup> :

$$C(0) = C^*(0) \approx 2,2 \times 10^{-16} \text{ F} \approx 0,22 \text{ fF}$$

Q33. On obtient 1024×768 condensateurs identiques en parallèle. La capacité équivalente vaut alors :

$$C_{\text{équivalente}} = 1024 \times 768 C(0) \approx 1,74 \times 10^{-10} \text{ F} \approx 174 \text{ pF}$$

C'est un résultat en cohérence avec celui mesuré.

Q34. On a directement :

$$W_{\text{élec}}(\alpha) = \frac{C(\alpha)U^2}{2} + \frac{C^*(\alpha)U^2}{2}$$

Q35. On se replace dans la situation du condensateur diédrique de la sous-section précédente. Supposons que un opérateur provoque une variation  $d\alpha$  de l'inclinaison de la plaque ( $P_2$ ). L'énergie électrique varie alors de :

$$\begin{aligned}
 W_{\text{élec}}(\alpha + d\alpha) - W_{\text{élec}}(\alpha) &= dW_{\text{élec}}(\alpha) \\
 &= \frac{1}{2} d(C(\alpha)) \cdot U^2
 \end{aligned}$$

Cela correspond au travail de la force électrique sur la plaque ( $P_2$ ) que l'on peut écrire sous la forme :

$$dW_{\text{élec}}(\alpha) = \iint_{\text{plaque } (P_2)} \vec{\delta^2 F}_{\text{élec}} \cdot \vec{d\ell}$$

où :

- $\vec{\delta^2 F}_{\text{élec}}$  est la force électrique s'appliquant à un élément de surface s'appliquant en un point  $M$  de la plaque ( $P_2$ ) de la part de la plaque ( $P_1$ );

1. On rappelle que fF est le symbole du femto-Farad

- $\vec{d\ell}$  est le déplacement élémentaire de ce même point  $M$  avec  $\vec{d\ell} = r d\alpha \vec{u}_\alpha$ .

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} dW_{\text{élec}}(\alpha) &= \iint_{\text{plaque } (P_2)} \sigma_2(r) \delta^2 S \left[ -\frac{\sigma_1(r)}{2\epsilon_0} \vec{u}_y \right] \cdot r d\alpha \vec{u}_\alpha \\ &= \left[ \iint_{\text{plaque } (P_2)} \frac{r \sigma_1(r) \sigma_2(r) \cos(\alpha)}{2\epsilon_0} \cdot \delta^2 S \right] \cdot d\alpha \end{aligned}$$

Le moment résultant de cet opérateur en projection sur  $\vec{u}_z$  vaut :

$$\begin{aligned} M_{\text{élec}}(\alpha) &= \vec{\mathcal{M}}_O(\text{élec}) \cdot \vec{u}_z \\ &= \left[ \iint_{\text{plaque } (P_2)} \vec{OM} \wedge \delta^2 F_{\text{opérateur}} \right] \cdot \vec{u}_z \\ &= \left[ \iint_{\text{plaque } (P_2)} \frac{r \sigma_2(r) \sigma_1(r)}{2\epsilon_0} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \delta^2 S \right] \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z \\ &= \left[ \iint_{\text{plaque } (P_2)} \frac{r \sigma_1(r) \sigma_2(r) \cos(\alpha)}{2\epsilon_0} \cdot \delta^2 S \right] \\ &= \frac{dW_{\text{élec}}(\alpha)}{d\alpha} \end{aligned}$$

Ce qui est le résultat attendu.

Q36. Dans le cas du micromiroir, on obtient :

$$M_{\text{élec}}(\alpha) = \frac{U^2}{2} \cdot \frac{dC}{d\alpha} + \frac{U^{*2}}{2} \cdot \frac{dC^*}{d\alpha}$$

Une étude (voir courbe ci-dessous) pour de faibles montre que  $C$  et  $C^*$  ont des sens de variation opposés avec  $\frac{dC}{d\alpha} > 0$  et  $\frac{dC^*}{d\alpha} < 0$ . La tensions  $U$  aura pour effet de faire augmenter  $\alpha$  et la tension  $U^*$  fera diminuer  $\alpha$ .

