Devoir maison 7 - Falcultatif - Pour le jeudi 18 avril 2024

S. Benlhajlahsen

Sommaire

I Le dermographe, machine à tatouer électrique (d'après Centrale TSI 2023)

I.A Champ magnétique créé par une bobine

Question 1 : On pourra se référer à la figure 1. On se place en coordonnées cylindriques. Pour n'importe quel point M, le plan $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ est un plan de symétrie des courants donc $\overrightarrow{B}(M)$ est selon $\overrightarrow{u_z}$.
De plus, il y a invariance par rotation autour de (Oz) et par translation selon $\overrightarrow{u_z}$ donc le champ magnétique ne dépend ni de θ ni de z.
Finalement, le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{B} = B(r)\overrightarrow{u_z}$$

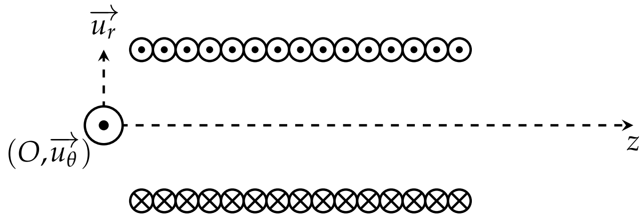

FIGURE 1

Question 2 : Pour appliquer le théorème d'Ampère, on choisit pour contour un rectangle (voir figure 2). Cela donne :

$$\oint \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} = B(r)L = \mu_0 nLi$$

Finalement, $\overrightarrow{B} = \mu_0 ni\overrightarrow{u_z}$.

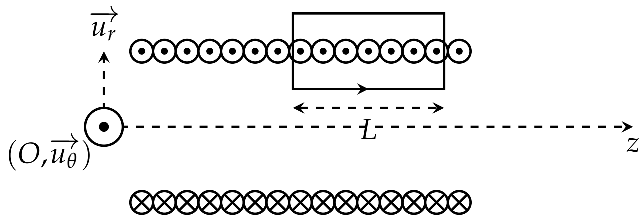

FIGURE 2

Question 3 : On se référera aux figures 3 et 4. Dans le cas d'une bobine infinie, le champ est uniforme donc les lignes de champ sont parallèles.
A l'inverse, dans le cas d'une bobine finie, le champ n'est plus uniforme et décroît à mesure que l'on s'éloigne de la bobine. Les lignes de champ ont alors tendance à s'évaser à mesure que l'on s'éloigne de la bobine.

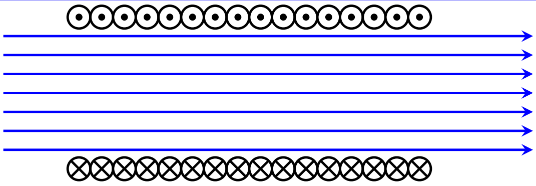

FIGURE 3 – solénoïde infini

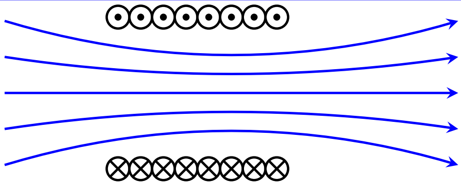

FIGURE 4 – solénoïde fini

I.B Fonctionnement du dermographe simplifié

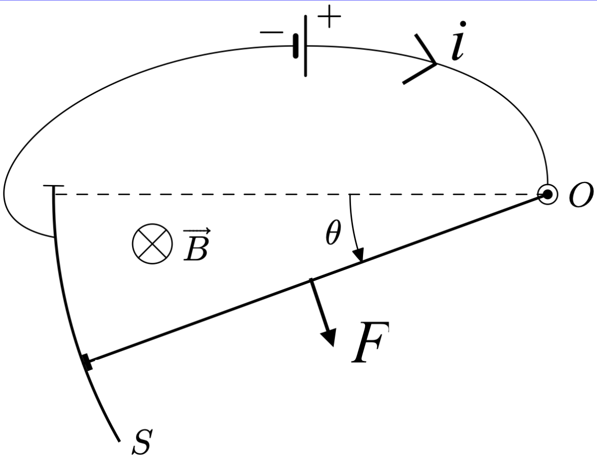

FIGURE 5

Question 4 : On se reportera à la figure 5. La tige mobile est soumise à la force de Laplace.

Question 5 : Dans ce cas, la seule action à prendre en compte est le couple de rappel $\vec{\Gamma}$. Cela donne un équilibre lorsque $\vec{\Gamma} = \vec{0}$ soit $\theta = 0$.

Question 6 : Le bilan des actions mécaniques est alors :

- l'action du couple de rappel : $\vec{\Gamma}$;
- les actions de Laplace : $\vec{\mathcal{M}}_0\,(\text{Laplace}) = \frac{IB\ell^2}{2}\vec{u_z}$;
- l'action du poids négligé
- l'action de la liaison négligé ;

Question 7 : On applique la loi du moment cinétique en projection sur l'axe $\vec{u_z}$:

$$J\ddot{\theta} = -K\theta + \frac{IB\ell^2}{2}$$

Puis :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \frac{K}{J}\theta &= \frac{IB\ell^2}{2J} \\ \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta &= A \end{aligned}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{J}}$ et $A = \frac{IB\ell^2}{2J}$.

Question 8 : $IB\ell^2$ est homogène un moment de force (en $\mathrm{N \cdot m}$ ou $\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}$) et J est en $\mathrm{kg \cdot m^2}$. Le rapport est alors en $\mathrm{s^{-2}}$ et ω_0 est bien homogène à une pulsation.

Question 9 : On a directement :

$$\theta(t) = C\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t) + \frac{A}{\omega_0^2}$$

On prend comme conditions initiales $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$. Cela donne finalement :

$$\theta(t) = \frac{A}{\omega_0^2} \cdot (1 - \cos(\omega_0 t))$$

Question 10 : On note tout d'abord que le sujet appelle I deux courants différents :

- le courant dans la bobine ;
- le courant dans le dermographe

Tout d'abord, on détermine le champ créé par la bobine :

$$B = \mu_0 \mu_r n I \approx 1{,}26\ \mathrm{T}$$

Ensuite, l'expression de $\theta(t)$ montre que le déplacement maximal de la tige se fait en $\theta_{\max} = \frac{A}{\omega_0^2}$ Il y a alors rupture de contact si $\theta_{\max} > \theta_S$ puis

$$K < \frac{IB\ell^2}{2\theta_S} \approx 0{,}0108\ \mathrm{J \cdot rad^{-1}}$$

Cette condition est bien vérifiée pour la valeur proposée.

Question 11 : On résoud alors $\theta(t_1) = \theta_S$ puis $\cos(\omega_0 t_1) = 1 - \frac{\omega_0^2 \theta_S}{A}$ puis $t_1 = \frac{1}{\omega_0} \arccos\left(1 - \frac{\omega_0^2 \theta_S}{A}\right) \approx 0{,}02$ s.

I.C Rupture du contact fermant le circuit

Question 12 : Dans ce cas, il ne faut prendre en compte que le couple de rappel. L'équation est alors directement :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

La résolution donne :

$$\theta(t') = C\cos(\omega_0 t' + \varphi)$$

avec $\theta(t' = 0) = \theta_S = C\cos(\varphi)$ et $\dot{\theta}(t' = 0) = -C\omega_0 \sin(\varphi) = \frac{A}{\omega_0^2}\omega_0 \sin(\omega_0 t_1)$. Après résolution, on obtient :

$$C = \sqrt{\theta_S^2 + \frac{A^2}{\omega_0^4}\left(1 - \left[1 - \frac{\omega_0^2 \theta_S}{A}\right]^2\right)}$$

Question 13 : L'amplitude du mouvement sans contact est alors $0{,}096 - \theta_S \approx 0{,}044$ rad $\approx 2{,}5°$

Question 14 : La courbe 4 est à éliminer car elle ne correspond pas à des arches de sinusoïdes. Les deux phases font apparaître la même pulsation donc cela élimine la courbe 3. Enfin, il ne semble pas possible de repasser régulièrement par 0. La bonne courbe est alors la courbe 2.