Programme de colle 11

S. Benlhajlahsen → PCSI$_1$

Semaine du lundi 18 décembre 2023

Sommaire

Au programme cette semaine :

I Régime sinusoïdal forcé

Introduction : On étudie la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale.

1. Complexes en physique
   (a) définitions
   (b) rappel sur l'arctangente
   (c) exemples
2. Signal alternatif sinusoïdal

   On retiendra Un signal temporel $s(t)$ de période T est alternatif si sa valeur moyenne sur une période est nulle :

   $$\langle s \rangle = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T s(t)\mathrm{d}t = 0$$

   Remarque Un signal sinusoïdal de la forme $s(t) = s_m \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$ est alternatif car sa valeur moyenne est nulle.

   On retiendra Un signal temporel $s(t)$ de période T a une valeur efficace s_{eff} définie par :

   $$s_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T s^2(t)\mathrm{d}t}$$

   Dans le cas d'un signal sinusoïdal $s(t) = s_m \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$ alors $s_{\text{eff}} = \frac{s_m}{\sqrt{2}}$.

   (a) définition
   (b) intérêt du signal alternatif sinusoïdal
3. Passage du régime transitoire au régime sinusoïdal forcé (R.S.F.)
   (a) circuit (R,C) alimenté par une source de tension sinusoïdale
   (b) cas du circuit (R,L,C) série alimenté par une source de tension sinusoïdale
4. Représentation complexe des grandeurs sinusoïdales

   (a) notation complexe des grandeurs sinusoïdales

   À Retenir Si on considère un signal sinusoïdal :

   $$s = s_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Le signal complexe associé sera :

$$\underline{s} = s_m \cdot e^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{S} \cdot e^{j\omega t}$$

$\underline{S} = s_m \cdot e^{j\varphi}$ est l'amplitude complexe. Bien entendu, $s = \mathrm{Re}\left(\underline{s}\right)$.

(b) intérêt de la notation complexe

À retenir C'est un résultat assez important qui correspond au passage de l'espace temporel vers l'espace des fréquences ou des pulsations.

opération temporelle sur $\underline{s}$	équivalent fréquentiel
$\dfrac{\mathrm{d}\underline{s}}{\mathrm{d}t}$	$j\omega \cdot \underline{s}$
$\dfrac{\mathrm{d}^2\underline{s}}{\mathrm{d}t^2}$	$(j\omega)^2 \cdot \underline{s} = -\omega^2 \cdot \underline{s}$
$\displaystyle\int \underline{s}\mathrm{d}t$	$\dfrac{\underline{s}}{j\omega}$

(c) diagramme de Fresnel

(d) déphasage entre u et i

Soit $\mathcal{D}$ un dipôle **linéaire** soumis à une tension $u = u_m \cos\left(\omega t + \varphi_u\right)$. Comme il est linéaire, son intensité peut se mettre sous la forme $i = i_m \cos\left(\omega t + \varphi_i\right)$.

♡♡♡ On note $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ le déphasage entre u et i, alors :

- si $\varphi > 0$, u est en avance de phase sur i ;
- si $\varphi < 0$, u est en retard de phase sur i ;
- si $\varphi \equiv 0\,[2\pi]$, u et i sont en phase ;
- si $\varphi \equiv \pi\,[2\pi]$, u et i sont en opposition de phase ;
- si $\varphi \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$, u et i sont en quadrature de phase.

On se reportera aux figures 1, 2 et 3 pour quelques exemples.

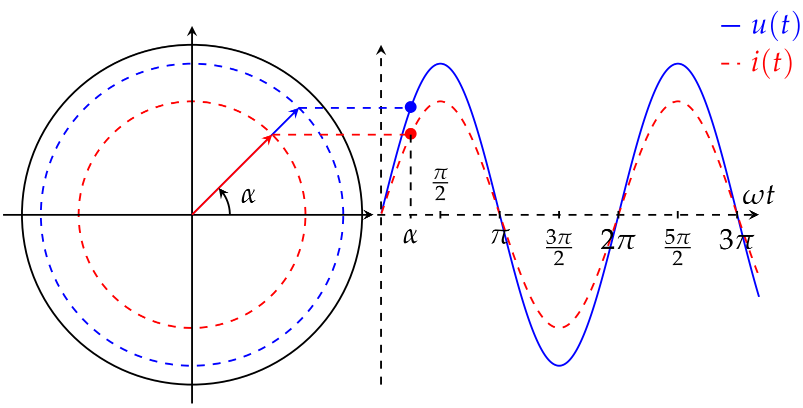

FIGURE 1 – Intensité et tension en phase. On a pris $u(t) = u_m \sin(\omega t)$ et $i(t) = i_m \sin(\omega t)$. Les amplitudes des signaux sont alors obtenues à partir de la partie imaginaire des signaux complexes.

5. Dipôles linéaires

(a) impédance et admittance complexe d'un dipôle passif

(b) cas des dipôles R, L et C

Capacité exigible : impédances complexes Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.

(c) association de dipôles passifs

i. association série

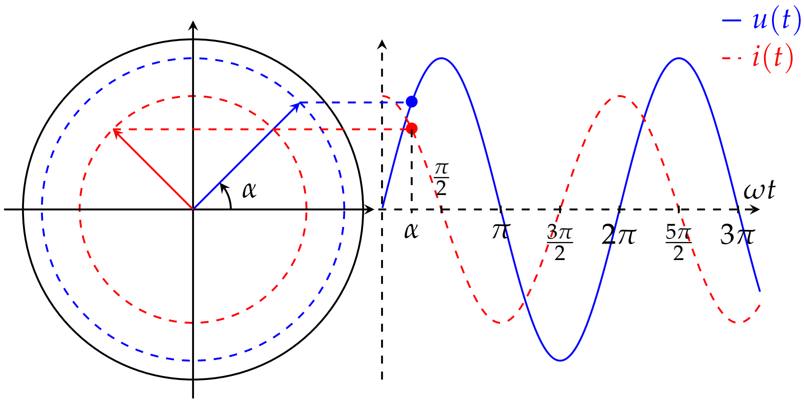

FIGURE 2 – Intensité en quadrature avance sur la tension. On a pris $u(t) = u_m \sin(\omega t)$ et $i(t) = i_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$. Les amplitudes des signaux sont alors obtenues à partir de la partie imaginaire des signaux complexes.

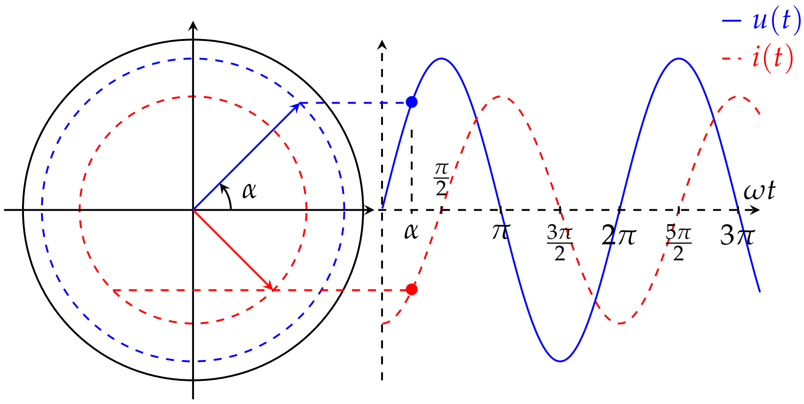

FIGURE 3 – Intensité en quadrature retard sur la tension. On a pris $u(t) = u_m \sin(\omega t)$ et $i(t) = i_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$. Les amplitudes des signaux sont alors obtenues à partir de la partie imaginaire des signaux complexes.

ii. association parallèle

> **Capacité exigible : association de deux impédances** Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.

II Approche énergétique du mouvement d'un point matériel dans un référentiel galiléen

1. Puissance et travail d'une force
   (a) déplacement élémentaire d'un point matériel M
   (b) travail élémentaire d'une force

   À retenir : Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$, le travail élémentaire de la force $\overrightarrow{F}$ pour un déplacement $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ est donné par :
$$\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$$

   Dimensions : Un travail est une forme d'énergie et s'exprimera donc en joule (J) dans le système international d'unités.

   (c) puissance développée par une force

   À retenir : La puissance $\mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}/\mathcal{R}\right)$ développée par la force $\overrightarrow{F}$ agissant sur le point matériel M de vitesse $\overrightarrow{v}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ vaut :
$$\mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}/\mathcal{R}\right) = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}\,(M/\mathcal{R})$$

   (d) propriété
   (e) travail d'une force le long d'un chemin fini
   (f) travail d'une force de norme et de direction constante
   (g) exemple du travail de la force de frottement solide

Capacité exigible : Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force.

Réponse : On retiendra que :
- si $\mathcal{P} > 0$ ou $\delta W > 0$, la force est motrice ;
- si $\mathcal{P} < 0$ ou $\delta W < 0$, la force a un rôle résistant.

2. Loi de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique en référentiel galiléen
   (a) énergie cinétique, loi de la puissance cinétique

   À retenir : Soit M un point matériel de vitesse $\overrightarrow{v}\,(M/\mathcal{R})$. Son énergie cinétique $E_C\,(M/\mathcal{R})$ vaut :
$$E_C\,(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} m \left\| \overrightarrow{v}\,(M/\mathcal{R}) \right\|^2$$

   Dimensions Cette énergie cinétique s'exprime en joule (J).

   À retenir : Soit M un point matériel, de vitesse $\overrightarrow{v}\,(M/\mathcal{R})$, soumis à une résultante de force $\overrightarrow{F}$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$. On a alors :
$$\frac{\mathrm{d}E_C\,(M/\mathcal{R})}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}/\mathcal{R}\right)$$

   (b) loi de l'énergie cinétique

   Loi de l'énergie cinétique : Si M se déplace entre les positions A et B alors :
$$\begin{aligned} E_C\,(B/\mathcal{R}) - E_C\,(A/\mathcal{R}) &= \int_A^B \delta W\left(\overrightarrow{F}/\mathcal{R}\right) \\ \Delta E_C &= W_{A\to B}\left(\overrightarrow{F}/\mathcal{R}\right) \end{aligned}$$

3. Énergie potentielle dans les problèmes à un degré de liberté
   (a) problème à un degré de liberté
   (b) notion d'énergie potentielle
   (c) notion de champ
   (d) définition de l'énergie potentielle E_P d'un champ de force

À retenir : Si la force $\overrightarrow{F}$ est conservative et « dérive » de l'énergie potentielle E_P alors :

$$\mathrm{d}E_P = -\delta W = -\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \Longleftrightarrow \overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(E_P)$$

où $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ est l'opérateur gradient.

A retenir : Le gradient d'une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (dans lequel l'espace est repéré par un système de coordonnées cartésiennes) a pour expression :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

Si f ne dépend que de la variable x alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\overrightarrow{u_x}$$

(e) énergie potentielle de pesanteur

(f) énergie potentielle élastique

Capacité exigible : Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme) et de l'énergie potentielle élastique.

Capacité exigible : Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie.

Capacité exigible : Déduire qualitativement, en un point du graphe d'une fonction énergie potentielle, le sens et l'intensité de la force associée.

Réponse : Le gradient indique le sens et la direction de l'augmentation de la grandeur sur laquelle il agit. $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(E_P)$ est dans le sens de l'augmentation de E_P. Comme $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(E_P)$, $\overrightarrow{F}$ est orienté des zones de fortes énergies vers les zones de faibles énergies avec une intensité qui augmente avec la « pente » de E_P.

4. Énergie potentielle dans les mouvements à plusieurs degrés de liberté

   (a) gradient

   (b) énergie potentielle dans un problème à plusieurs degrés de liberté

5. Condition et stabilité d'un équilibre

   (a) condition de l'équilibre

   (b) stabilité de l'équilibre

   (c) étude des petits mouvement autour d'une position d'équilibre stable, technique de « linéarisation »

Capacité exigible : Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre.

6. Énergie mécanique d'un point matériel en référentiel galiléen

Capacité exigible : Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales.

   (a) énergie mécanique

   (b) mouvement d'un point matériel dans un champs de force conservative

Capacité exigible : Identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel.
Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.

Capacité exigible : Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre. Analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.

   (c) période d'oscillation dans un puits de potentiel parabolique ou puits de potentiel harmonique

   (d) période d'oscillation dans un puits de potentiel non-parabolique

Capacité numérique : À l'aide d'un langage de programmation, résoudre numériquement une équation différentielle du deuxième ordre non-linéaire et faire apparaître l'effet des termes nonlinéaires.

Remarque : En figure 4, on résume l'ensemble des lois à disposition pour l'étude du mouvment d'un point matériel.

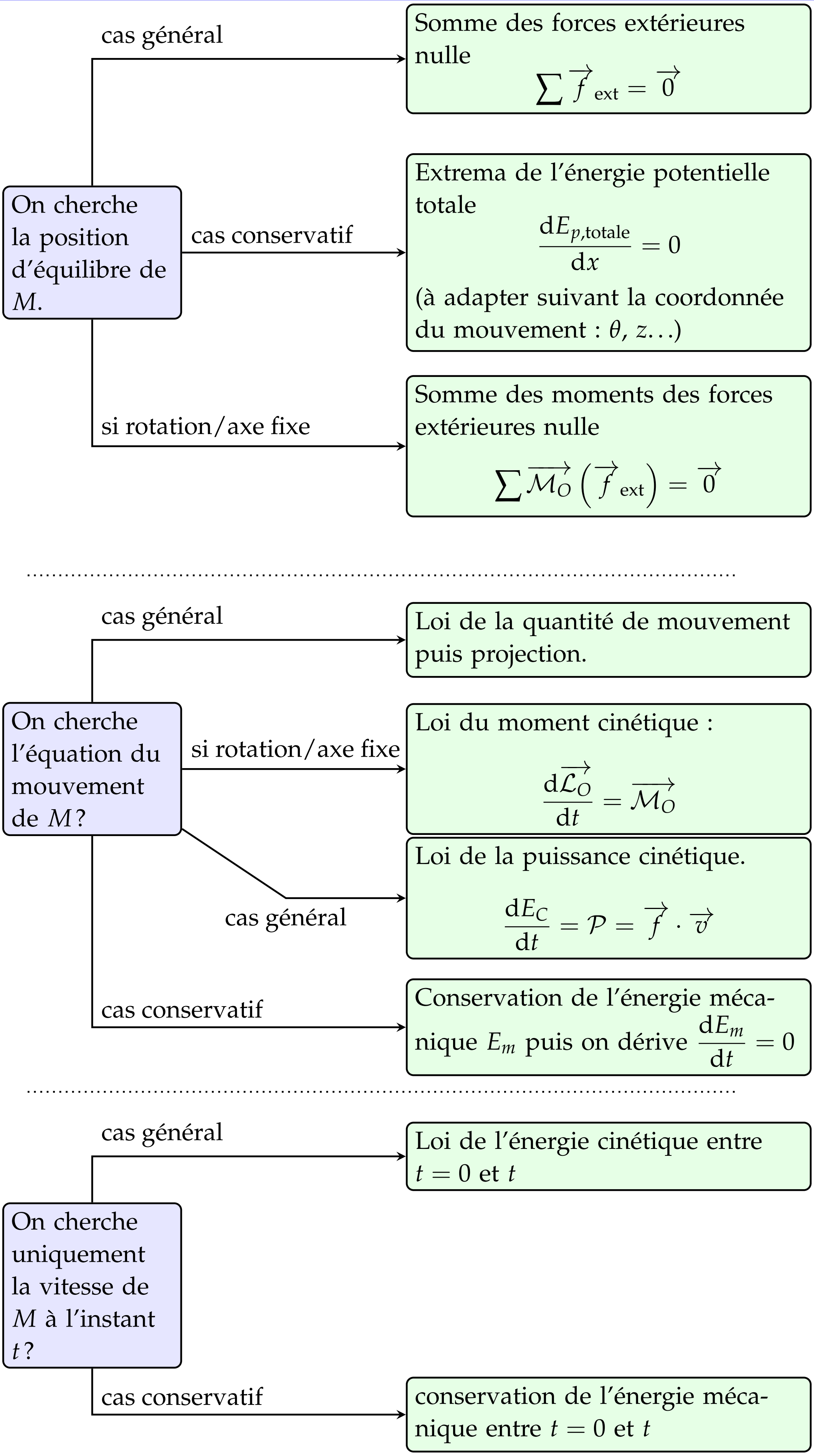
cas général
Somme des forces extérieures nulle $\sum \vec{f}_{\text{ext}} = \vec{0}$
On cherche la position d'équilibre de M.
cas conservatif
Extrema de l'énergie potentielle totale $\frac{\mathrm{d}E_{p,\text{totale}}}{\mathrm{d}x} = 0$
(à adapter suivant la coordonnée du mouvement : θ, z...)
si rotation/axe fixe
Somme des moments des forces extérieures nulle
$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}_{\text{ext}}\right) = \vec{0}$
cas général
Loi de la quantité de mouvement puis projection.
On cherche l'équation du mouvement de M ?
si rotation/axe fixe
Loi du moment cinétique : $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{L}_O}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}$
cas général
Loi de la puissance cinétique. $\frac{\mathrm{d}E_C}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P} = \vec{f} \cdot \vec{v}$
cas conservatif
Conservation de l'énergie mécanique E_m puis on dérive $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$
cas général
Loi de l'énergie cinétique entre $t = 0$ et t
On cherche uniquement la vitesse de M à l'instant t ?
cas conservatif
conservation de l'énergie mécanique entre $t = 0$ et t

FIGURE 4