Programme de colle 13

S. Benlhajlahsen → PCSI$_1$

Semaine du lundi 6 janvier 2025

Sommaire

Au programme cette semaine :

I Résonance dans les systèmes linéaires

1. Réponse d'un oscillateur mécanique harmonique amorti à une excitation sinusoïdale
   (a) Équation du mouvement
   (b) régime transitoire - régime sinusoïdale forcé
   (c) réponse à un signal périodique non sinusoïdale
2. Régime sinusoïdal forcé - réponse en position
   (a) notation complexe

   > **Capacité exigible :** Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.

   (b) phénomène de résonance en position
3. Résonance en vitesse

   > **Capacité exigible :** Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité.

   > **Réponse :** L'acuité de la résonance est la « finesse relative » la courbe de résonance (voir figure 1) :
   > $$Q = \frac{f_{\text{rés}}}{\text{largeur de la bande passante}} = \frac{f_{\text{rés}}}{\Delta f}$$

   > **Capacité exigible :** Déterminer la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.

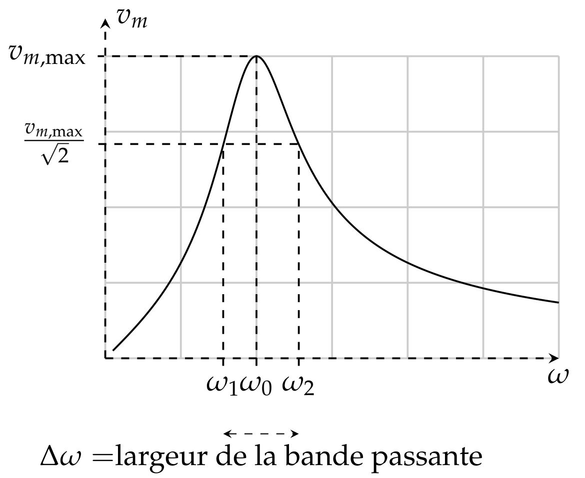

FIGURE 1 – Bande passante.

   (a) notation complexe
   (b) phénomène de résonance en vitesse
   (c) notion de bande passante
4. Analogie électromécanique

II Approche énergétique du mouvement d'un point matériel dans un référentiel galiléen

1. Puissance et travail d'une force
   (a) déplacement élémentaire d'un point matériel M
   (b) travail élémentaire d'une force

   À retenir : Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$, le travail élémentaire de la force $\overrightarrow{F}$ pour un déplacement $\overrightarrow{d\ell}$ est donné par :
   $$\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

   Dimensions : Un travail est une forme d'énergie et s'exprimera donc en joule (J) dans le système international d'unités.

   (c) puissance développée par une force

   À retenir : La puissance $\mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}/\mathcal{R}\right)$ développée par la force $\overrightarrow{F}$ agissant sur le point matériel M de vitesse $\overrightarrow{v}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ vaut :
   $$\mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}/\mathcal{R}\right) = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}(M/\mathcal{R})$$

   (d) propriété
   (e) travail d'une force le long d'un chemin fini
   (f) travail d'une force de norme et de direction constante
   (g) exemple du travail de la force de frottement solide

   Capacité exigible : Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force.

   Réponse : On retiendra que :
   - si $\mathcal{P} > 0$ ou $\delta W > 0$, la force est motrice ;
   - si $\mathcal{P} < 0$ ou $\delta W < 0$, la force a un rôle résistant.

2. Loi de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique en référentiel galiléen
   (a) énergie cinétique, loi de la puissance cinétique

   À retenir : Soit M un point matériel de vitesse $\overrightarrow{v}(M/\mathcal{R})$. Son énergie cinétique $E_C(M/\mathcal{R})$ vaut :
   $$E_C(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m\left\|\overrightarrow{v}(M/\mathcal{R})\right\|^2$$

   Dimensions Cette énergie cinétique s'exprime en joule (J).

   À retenir : Soit M un point matériel, de vitesse $\overrightarrow{v}(M/\mathcal{R})$, soumis à une résultante de force $\overrightarrow{F}$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$. On a alors :
   $$\frac{dE_C(M/\mathcal{R})}{dt} = \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}/\mathcal{R}\right)$$

   (b) loi de l'énergie cinétique

   Loi de l'énergie cinétique : Si M se déplace entre les positions A et B alors :
   $$\begin{aligned} E_C(B/\mathcal{R}) - E_C(A/\mathcal{R}) &= \int_A^B \delta W\left(\overrightarrow{F}/\mathcal{R}\right) \\ \Delta E_C &= W_{A\to B}\left(\overrightarrow{F}/\mathcal{R}\right) \end{aligned}$$

3. Énergie potentielle dans les problèmes à un degré de liberté
   (a) problème à un degré de liberté
   (b) notion d'énergie potentielle
   (c) notion de champ
   (d) définition de l'énergie potentielle E_P d'un champ de force

À retenir : Si la force $\overrightarrow{F}$ est conservative et « dérive » de l'énergie potentielle E_P alors :

$$\mathrm{d}E_P = -\delta W = -\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \Longleftrightarrow \overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(E_P)$$

où $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ est l'opérateur gradient.

A retenir : Le gradient d'une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (dans lequel l'espace est repéré par un système de coordonnées cartésiennes) a pour expression :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

Si f ne dépend que de la variable x alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\overrightarrow{u_x}$$

(e) énergie potentielle de pesanteur

(f) énergie potentielle élastique

Capacité exigible : Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme) et de l'énergie potentielle élastique.

Capacité exigible : Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie.

Capacité exigible : Déduire qualitativement, en un point du graphe d'une fonction énergie potentielle, le sens et l'intensité de la force associée.

Réponse : Le gradient indique le sens et la direction de l'augmentation de la grandeur sur laquelle il agit. $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(E_P)$ est dans le sens de l'augmentation de E_P. Comme $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(E_P)$, $\overrightarrow{F}$ est orienté des zones de fortes énergies vers les zones de faibles énergies avec une intensité qui augmente avec la « pente » de E_P.

4. Énergie potentielle dans les mouvements à plusieurs degrés de liberté
   (a) gradient
   (b) énergie potentielle dans un problème à plusieurs degrés de liberté
5. Condition et stabilité d'un équilibre
   (a) condition de l'équilibre
   (b) stabilité de l'équilibre
   (c) étude des petits mouvement autour d'une position d'équilibre stable, technique de « linéarisation »

Capacité exigible : Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre.

6. Énergie mécanique d'un point matériel en référentiel galiléen

Capacité exigible : Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales.

(a) énergie mécanique

(b) mouvement d'un point matériel dans un champs de force conservative

Capacité exigible : Identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel.
Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.

Capacité exigible : Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre. Analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.

(c) période d'oscillation dans un puits de potentiel parabolique ou puits de potentiel harmonique

(d) période d'oscillation dans un puits de potentiel non-parabolique

Capacité numérique : À l'aide d'un langage de programmation, résoudre numériquement une équation différentielle du deuxième ordre non-linéaire et faire apparaître l'effet des termes nonlinéaires.

Remarque : En figure 2, on résume l'ensemble des lois à disposition pour l'étude du mouvment d'un point matériel.

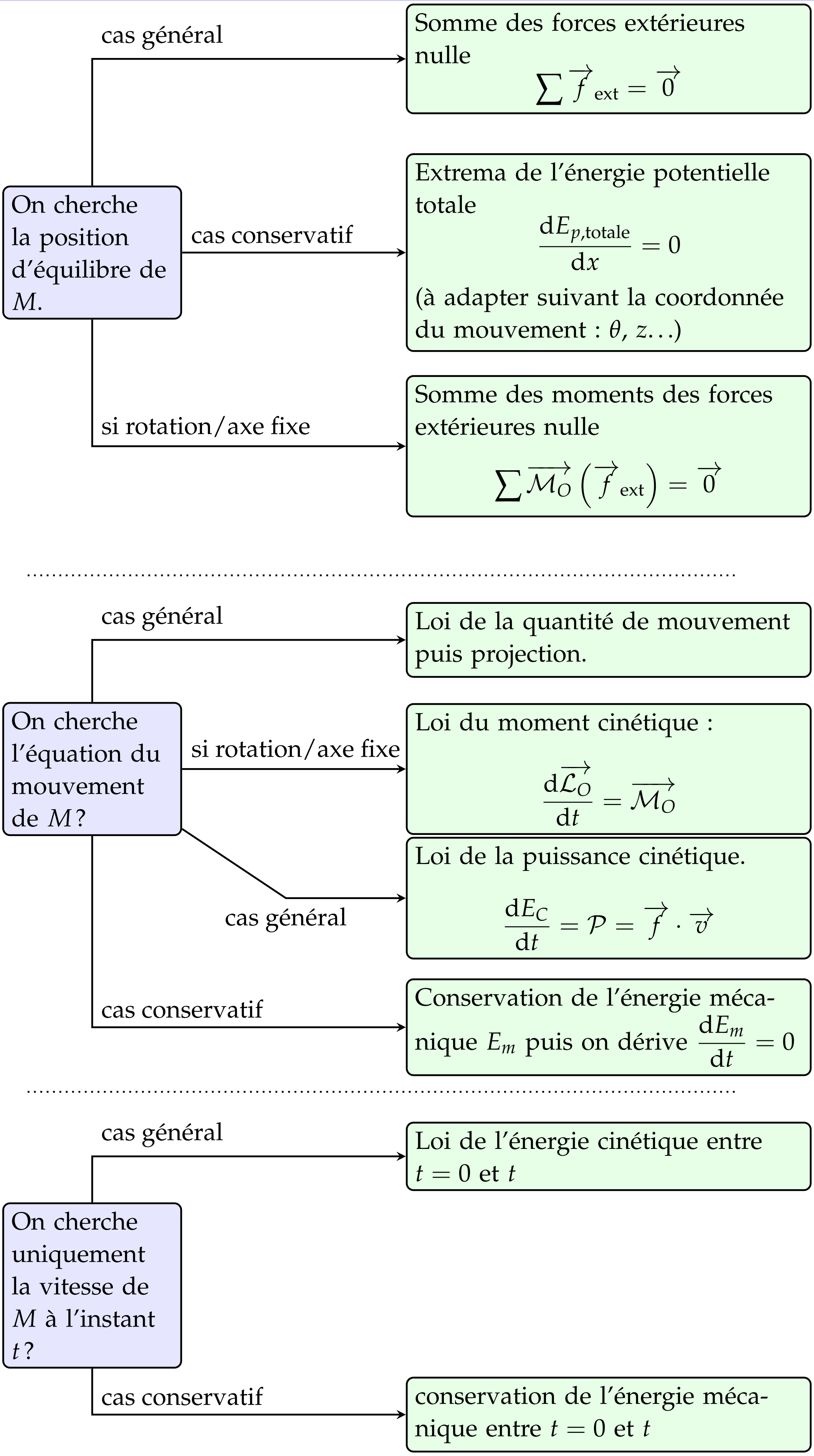
On cherche la position d'équilibre de M.
cas général
Somme des forces extérieures nulle $\sum \overrightarrow{f}_{ext} = \overrightarrow{0}$
cas conservatif
Extrema de l'énergie potentielle totale $\frac{dE_{p,totale}}{dx} = 0$ (à adapter suivant la coordonnée du mouvement : θ, z...)
si rotation/axe fixe
Somme des moments des forces extérieures nulle $\sum \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{f}_{ext}\right) = \overrightarrow{0}$
On cherche l'équation du mouvement de M ?
cas général
Loi de la quantité de mouvement puis projection.
si rotation/axe fixe
Loi du moment cinétique : $\frac{d\overrightarrow{\mathcal{L}_O}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}$
cas général
Loi de la puissance cinétique. $\frac{dE_C}{dt} = \mathcal{P} = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v}$
cas conservatif
Conservation de l'énergie mécanique E_m puis on dérive $\frac{dE_m}{dt} = 0$
On cherche uniquement la vitesse de M à l'instant t ?
cas général
Loi de l'énergie cinétique entre $t = 0$ et t
cas conservatif
conservation de l'énergie mécanique entre $t = 0$ et t

FIGURE 2