Programme de colle 15

S. Benlhajlahsen → PCSI$_1$

Semaine du lundi 22 janvier 2024

Sommaire

Notes pour les colleurs : La décomposition de Fourier a été présentée mais il semble préférable de l'utiliser avec les filtres.

Au programme cette semaine :

I Moment de force et moment cinétique

1. Rappel sur le produit vectoriel
2. Moment d'une force
   (a) Moment d'une force par rapport à un point O
   (b) Moment d'une force par rapport à un axe

   Capacité exigible : Utiliser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.

   (c) Notion de bras de levier

   Capacité exigible : Exprimer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.

   Réponse : Le bras de levier est la distance d entre l'axe de rotation et le support de la force (voir figures 1 et 2). Dans ce cas, $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{F}\right) = \pm d \cdot \left\|\overrightarrow{F}\right\| \overrightarrow{u_z}$.

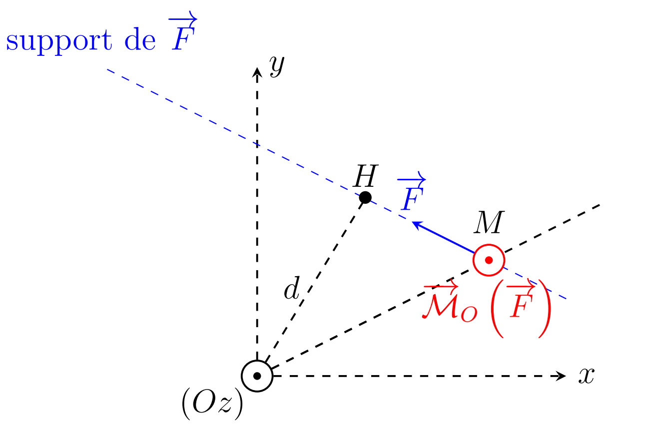


FIGURE 1 – moment de force. La force a tendance à faire tourner M dans le sens positif.

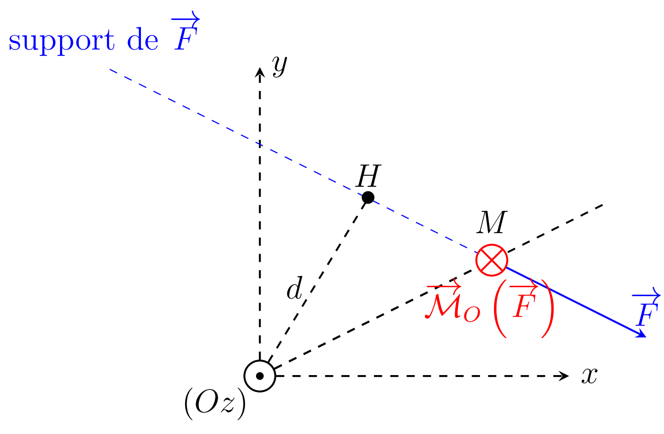


FIGURE 2 – moment de force. La force a tendance à faire tourner M dans le sens négatif.

3. Moment cinétique d'un point matériel
   (a) Moment cinétique par rapport à un point O
   (b) Moment cinétique par rapport à un axe
   (c) Moment d'inertie J
   (d) Énergie cinétique pour un mouvement de rotation circulaire
4. Analogie entre translation et rotation
5. Loi du moment cinétique (TMC)
   (a) Loi du moment cinétique en un point fixe
   (b) Loi du moment cinétique scalaire

> **Capacité exigible :** Identifier les cas de conservation du moment cinétique.

> **Réponse :** C'est le cas d'un système isolé ou soumis à des forces de moments nuls. Le cas d'une force centrale ($\overrightarrow{F} \parallel \overrightarrow{OM}$) est étudié en détail dans le chapitre sur le mouvement des planètes dans le système solaire.

6. Équilibre et stabilité
   (a) Condition de l'équilibre
   (b) Condition de la stabilité

II Résonance dans les systèmes linéaires

1. Réponse d'un oscillateur mécanique harmonique amorti à une excitation sinusoïdale
   (a) Équation du mouvement
   (b) régime transitoire - régime sinusoïdale forcé
   (c) réponse à un signal périodique non sinusoïdale
2. Régime sinusoïdal forcé - réponse en position
   (a) notation complexe

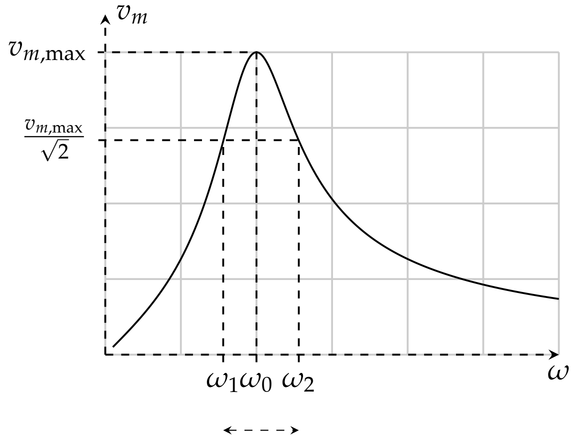
   > **Capacité exigible :** Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.

   (b) phénomène de résonance en position
3. Résonance en vitesse

> **Capacité exigible :** Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité.

> **Réponse :** L'acuité de la résonance est la « finesse relative » la courbe de résonance (voir figure 3) :
>
> $$Q = \frac{f_{\text{rés}}}{\text{largeur de la bande passante}} = \frac{f_{\text{rés}}}{\Delta f}$$

> **Capacité exigible :** Déterminer la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.



$\Delta\omega$ =largeur de la bande passante

FIGURE 3 – Bande passante.

   (a) notation complexe
   (b) phénomène de résonance en vitesse
   (c) notion de bande passante
4. Analogie électromécanique

III Décomposition de Fourier - Analyse harmonique d'un signal

1. On considére un signal $e(t)$ périodique. On note T_0 sa période et $f_0 = \frac{1}{T_0}$. Sa pulsation est alors définie par $\omega_0 = 2\pi f_0$.

> **À retenir :** Tout signal physique périodique est décomposable en une somme de signaux sinusoïdaux.

> **À retenir :** Les termes de la décomposition en série de Fourier ont des pulsations multiples entiers de la pulsation du signal à décomposer.

> **À retenir :** La décomposition peut donc s'écrire de manière générale :
>
> $$e(t) = m + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) = m + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$
>
> m est la valeur moyenne de la fonction $e(t)$ définie par :
>
> $$m = \langle e \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{t=0}^{T_0} e(t)\mathrm{d}t$$
>
> a_n et b_n sont les coefficients de la série de Fourier de la fonction e. De plus, $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

2. On attribue généralement la fréquence nulle à la valeur moyenne.
3. Si un signal est paire, sa décomposition de comporte que des cosinus.
4. Si un signal est impaire, sa décomposition de comporte que des sinus.
5. On donne en figure 4, le spectre d'un signal sinusoïdal. Celui-ci ne comporte qu'une fréquence.
6. On donne en figure 5, le spectre d'un signal triangulaire alternatif. L'amplitude des harmoniques décroît comme $\dfrac{1}{n^2}$.
7. On donne en figure 6, le spectre d'un signal rectangulaire alternatif. L'amplitude des harmoniques décroît comme $\dfrac{1}{n}$.

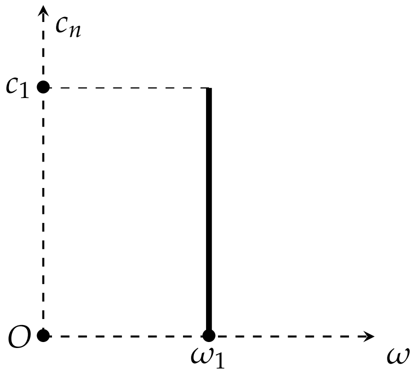


FIGURE 4 – Spectre d'un signal sinusoïdal de pulsation ω_1.

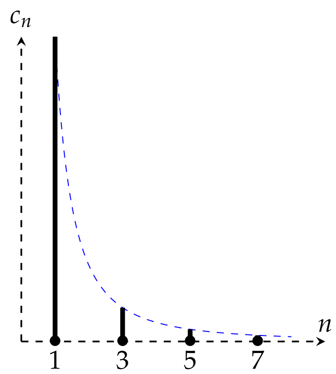


FIGURE 5 – Spectre d'un signal triangulaire.

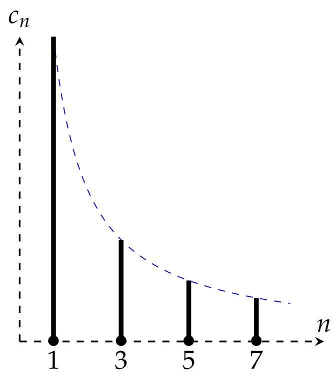


FIGURE 6 – Spectre d'un signal créneau.