Programme de colle 15

S. Benlhajlahsen $\rightarrow$ *PCSI*$_1$

Semaine du lundi 20 janvier 2025

Sommaire

Au programme cette semaine :

I Filtres analogiques

1. Fonction de transfert
   (a) contexte
   (b) fonction de transfert
   (c) ordre d'un filtre et stabilité
2. Diagramme de Bode
   (a) Gain du filtre, gain en décibel (dB)
   (b) nature du filtre
   (c) diagramme de Bode

> **Capacité exigible :** Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1.

> **Capacité exigible :** Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique.

> **Remarque :** Dans le cas d'un signal périodique, il faut immédiatement penser à la décomposition harmonique et au théorème de superposition. Le signal en sortie sera la somme des réponses du filtre à chaque harmonique de la décompisition de Fourier.

3. Filtre du premier ordre
   (a) filtre passe-bas d'ordre - circuit (R, C) (figure 1)

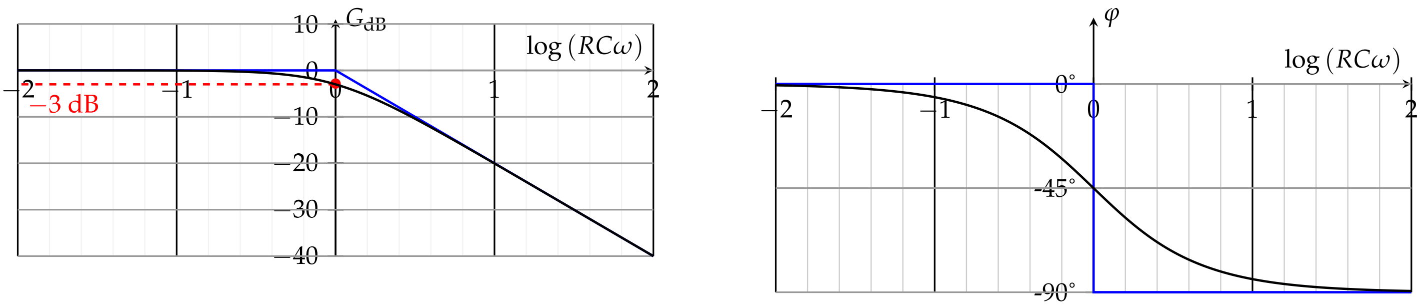


FIGURE 1 – Diagramme de Bode du filtre RC passe-bas. On a tracé en bleu le diagramme asymptotique.

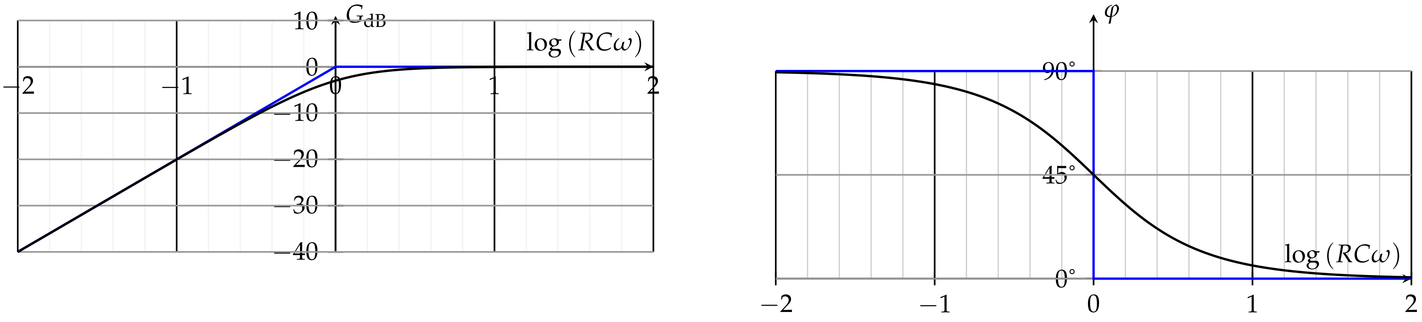


FIGURE 2 – Diagramme de Bode du filtre RC passe-haut. On a rajouté en bleu le diagramme asymptotique.

(b) étude du filtre passe-haut (figure 2)

(c) forme canonique

4. Filtre du second ordre

   (a) filtre passe-bas du second ordre - circuit (R,L,C) (voir figure 3)

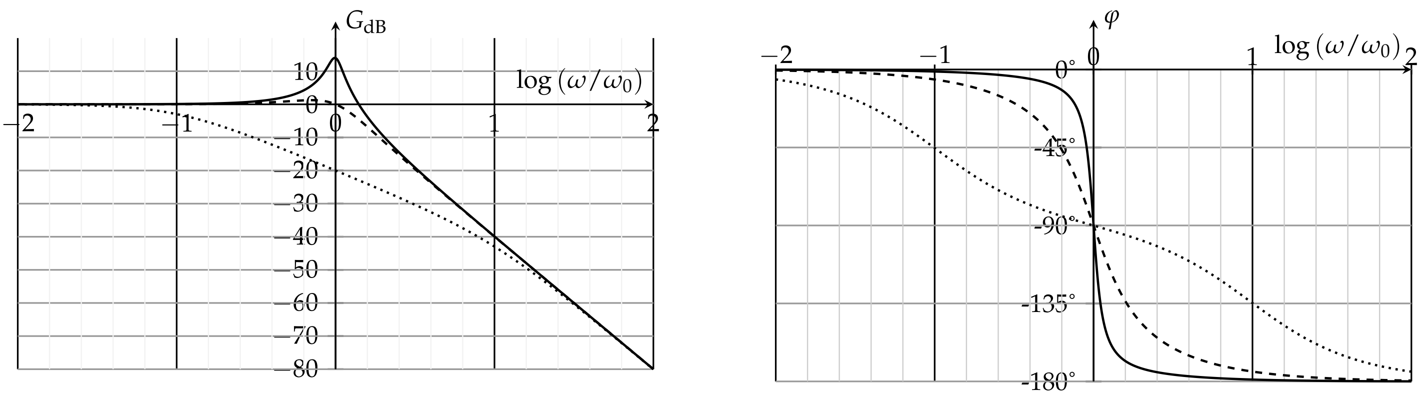


FIGURE 3 – Diagramme de Bode du filtre (R,L,C) passe-bas pour trois valeurs de facteurs de qualité $Q = 5.0$ en trait plein, $Q = 1.0$ en tirets et $Q = 0.1$ en pointillés. On notera qu'il est globalement passe-bas mais qu'il présente une résonance si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Enfin, on remarquera que la décroissance du gain à hautes fréquences se fait avec une pente en -40 dB/décade

   (b) filtre passe-bande du second ordre - circuit (R,L,C) (voir figure 4)

   > **Remarque :** On notera que la fonction de transfert pourra souvent se mettre sous la forme :
   >
   > $$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$
   >
   > où ω_0 est la pulsation de résonance, Q le facteur de qualité et H_0 la fonction de transfert à la résonance.

> **Capacité exigible :** Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert.

> **Remarque :** Il faut noter que les droites sont de pente ±20 dB/décade ou ±40 dB/décade suivant les cas.

> **Capacité exigible :** Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.

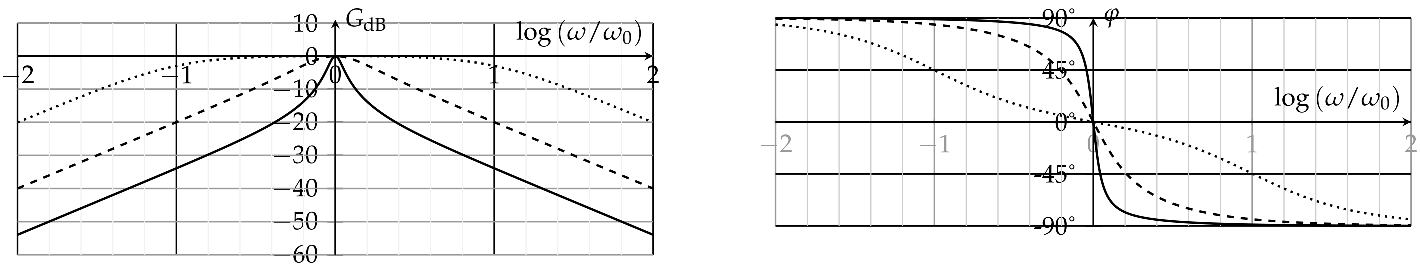


FIGURE 4 – Diagramme de Bode du filtre (R,L,C) passe-bande pour trois valeurs de facteurs de qualités $Q = 5.0$ en trait plein, $Q = 1.0$ en tirets et $Q = 0.1$ en pointillés. On notera l'augmentation de l'acuité (et de ce fait, la diminution de la bande-passante) de la résonance avec le facteur de qualité.

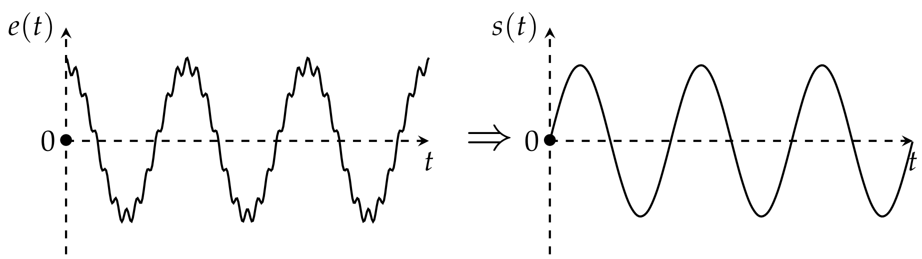
Traduction : Suivant le filtrage voulu, il faut pouvoir déterminer la nature du filtre, donner un ordre de grandeur de la fréquence de coupure ou de résonance et, éventuellement, la largeur de la bande passante.

Capacité exigible : Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyenneur, intégrateur, ou dérivateur.

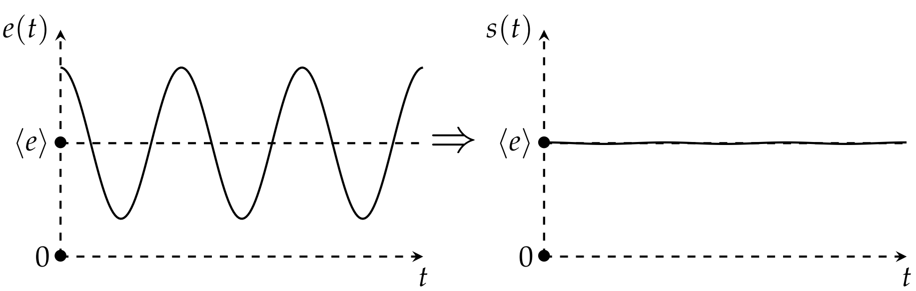
Explication pour le intégrateur : Un filtre est du type intégrateur si sa fonction de transfert est du type : $\underline{H} \propto \frac{1}{j\omega}$. C'est un filtre instable à basses fréquences. On notera qu'un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure faible sera assimilable à un intégrateur :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_c}} \approx \frac{\omega_c}{j\omega} \propto \frac{1}{j\omega} \text{ pour } \omega_c \ll \omega$$

Il est souvent utilisé pour lisser un signal, c'est-à-dire éliminer les fluctuations rapides de ce signal.



Explication pour le moyenneur : Un filtre moyenneur est très proche de l'intégrateur. C'est n'importe quel filtre passe-bas[a] de fréquence de coupure suffisamment basse pour éliminer l'ensemble de la partie alternative d'un signal. Il ne conservera que la composante continue[b].



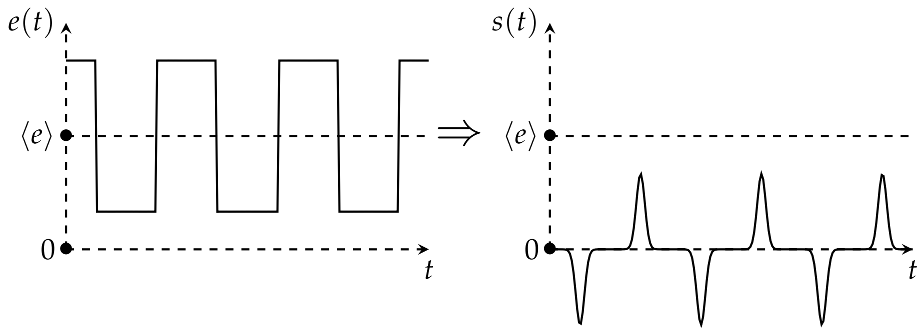
a. Peu importe son ordre
b. c'est-à-dire la valeur moyenne

Explication pour le dérivateur : Un filtre est du type dérivateur si sa fonction de transfert est du type : $\underline{H} \propto j\omega$.

C'est un filtre instable à hautes fréquences. On notera qu'un filtre passe-haut du premier ordre de fréquence de coupure élevée sera assimilable à un dérivateur :

$$\underline{H} = \frac{\frac{j\omega}{\omega_c}}{1+\frac{j\omega}{\omega_c}} \approx \frac{j\omega}{\omega_c} \propto j\omega \;\text{ pour }\; \omega_c \gg \omega$$

Il est souvent utilisé pour créer des impulsions à partir d'un signal rectangulaire.



Capacité exigible : Expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique (sismomètre, amortisseur, accéléromètre, ...).

Réponse :

- un sismomètre doit avoir une réponse fidèle à l'onde sismique. On doit éviter qu'il résonne dans la gamme des fréquences sismiques ([0,5 Hz; 15 Hz]) ;
- un amortisseur est un filtre passe-bas à faible facteur de qualité pour éliminer les fréquences élevées ;
- pour un accéléromètre, la grandeur en entrée est l'accélération et la grandeur en sortie est généralement une position.

Capacité exigible : Étudier le filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal à partir d'une analyse spectrale.

Capacité exigible : Détecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles fréquences.

Capacité numérique : Simuler, à l'aide d'un langage de programmation, l'action d'un filtre sur un signal périodique dont le spectre est fourni. Mettre en évidence l'influence des caractéristiques du filtre sur l'opération de filtrage.

5. Effet d'un filtre passe-bas sur un signal créneau
6. Effet d'un filtre passe-bande sur un signal créneau

II Moment de force et moment cinétique

1. Rappel sur le produit vectoriel
2. Moment d'une force
   (a) Moment d'une force par rapport à un point O
   (b) Moment d'une force par rapport à un axe

   Capacité exigible : Utiliser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.

   (c) Notion de bras de levier

   Capacité exigible : Exprimer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.

   Réponse : Le bras de levier est la distance d entre l'axe de rotation et le support de la force (voir figures 5 et 6). Dans ce cas, $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O\left(\overrightarrow{F}\right) = \pm d \cdot \left\|\overrightarrow{F}\right\| \overrightarrow{u_z}$.

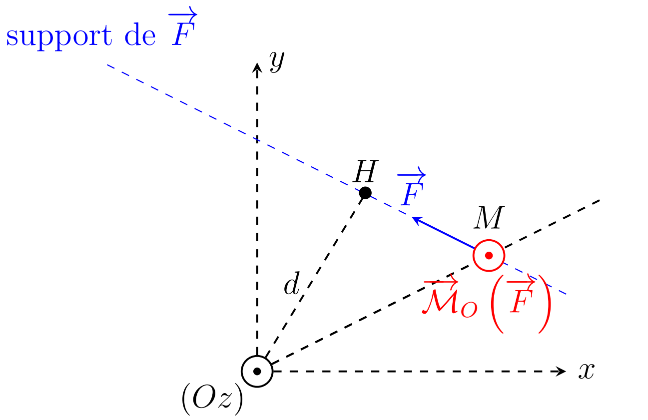


FIGURE 5 – moment de force. La force a tendance à faire tourner M dans le sens positif.

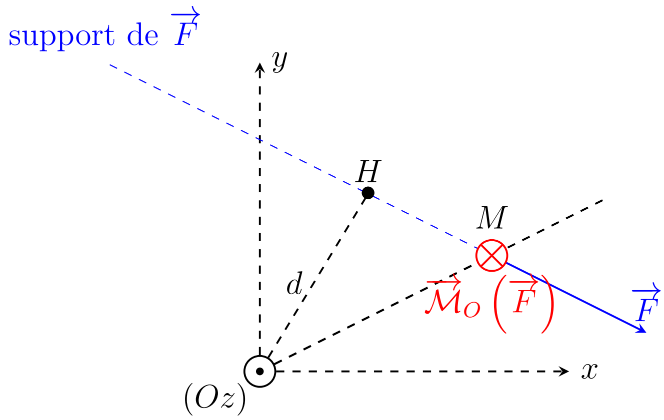


FIGURE 6 – moment de force. La force a tendance à faire tourner M dans le sens négatif.

3. Moment cinétique d'un point matériel
   (a) Moment cinétique par rapport à un point O
   (b) Moment cinétique par rapport à un axe
   (c) Moment d'inertie J
   (d) Énergie cinétique pour un mouvement de rotation circulaire
4. Analogie entre translation et rotation
5. Loi du moment cinétique (TMC)
   (a) Loi du moment cinétique en un point fixe
   (b) Loi du moment cinétique scalaire

   Capacité exigible : Identifier les cas de conservation du moment cinétique.

   Réponse : C'est le cas d'un système isolé ou soumis à des forces de moments nuls. Le cas d'une force centrale ($\overrightarrow{F} \parallel \overrightarrow{OM}$) est étudié en détail dans le chapitre sur le mouvement des planètes dans le système solaire.

6. Équilibre et stabilité
   (a) Condition de l'équilibre
   (b) Condition de la stabilité