



Semaine du lundi 27 janvier 2025

## Sommaire

I Le champ électrique	1
II Filtres analogiques	5

Au programme cette semaine :

### I Le champ électrique

1. La charge électrique
2. Distribution de charge
  - (a) distribution de charge discrète
  - (b) choix de l'échelle
  - (c) distribution volumique de charge
  - (d) distribution surfacique de charge
  - (e) distribution linéique de charge
3. Champ électrostatique
  - (a) interaction entre deux charges ponctuelles
  - (b) champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

**Capacité exigible - programme PC :** Loi de Coulomb. Champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle. Principe<sup>a</sup> de superposition.

Exprimer le champ électrostatique créés par une distribution discrète de charges.

Citer quelques ordres de grandeur de champs électrostatiques.

a. ou plutôt théorème

- (c) ligne du champ électrostatique (ldc) et carte de champ

**Capacité exigible - programme PC :** Justifier qu'une carte de lignes de champ puisse ou non être celle d'un champ électrostatique.

Repérer, sur une carte de champ électrostatique, d'éventuelles sources du champ et leur signe. Associer l'évolution de la norme du champ électrostatique à l'évasement des tubes de champ loin des sources.

**Capacité exigible - programme PSI :** Associer l'évasement des tubes de champ à l'évolution de la norme du champ électrique en dehors des sources.

**Réponse :** On retiendra quelques idées simples :

- Les lignes de champ électrique ont tendance à diverger depuis les charges positives et à converger vers les charges négatives.
- Lorsqu'on s'éloignent des charges, les lignes de champ s'évasent à cause d'une diminution de champ électrique<sup>a</sup> ;
- enfin, contrairement aux lignes du champ magnétiques, les lignes du champ électrique ne sont pas nécessairement fermée.

a. Voir la conservation du flux du champ électrique dans une zone vide de charge.

4. Symétrie et invariance d'une distribution

**Capacité exigible - programme PC :** Exploiter les propriétés de symétrie des sources (translation, rotation, symétrie plane, conjugaison de charges) pour prévoir des propriétés du champ créé.

**Capacité exigible - programme PSI :** Exploiter les symétries et invariances d'une distribution de charges pour en déduire des propriétés du champ électrique.

- (a) distribution de charge présentant un plan de symétrie
- (b) distribution de charge présentant un plan d'antisymétrie
- (c) invariance par translation
- (d) invariance par rotation autour de  $(Oz)$
- (e) propriété de symétrie du champ électrique

5. Analyse de quelques champs

- (a) cas d'un fil uniformément chargé et de longueur finie

**Contexte** On considère un fil de longueur  $2a$  colinéaire à l'axe  $(Oz)$  et portant une densité linéique de charge uniforme  $\lambda$  (voir figure 1). Ainsi, ce fil porte une charge totale :  $Q = \int_{z_P=-a}^a \lambda dz_P = 2a\lambda$ . On cherche l'expression du champ électrique créé par ce fil en un point  $M$  de son plan médiateur. On prend  $M$  sur l'axe  $(Ox)$ .

**Exercice 1 :**

- i. Préciser les éléments de symétrie de cette distribution de charge.
- ii. On donne en figure 2 la carte du champ électrique. Que constate-t-on ?
- iii. On donne le champ électrique créé par ce fil en un point  $M$  appartenant à l'axe  $(Ox)$  s'écrit :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2a}{x_M \cdot \sqrt{a^2 + x_M^2}} \vec{u}_x$$

Vérifier l'homogénéité de cette expression et l'accord avec les plans de symétrie.

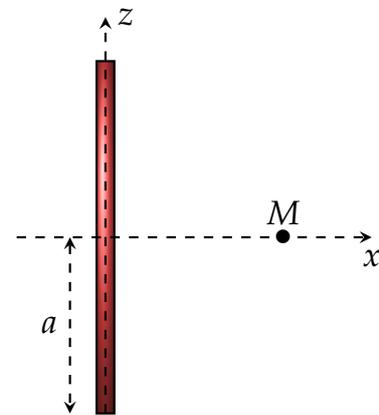


FIGURE 1 – Fil fini chargé uniformément.

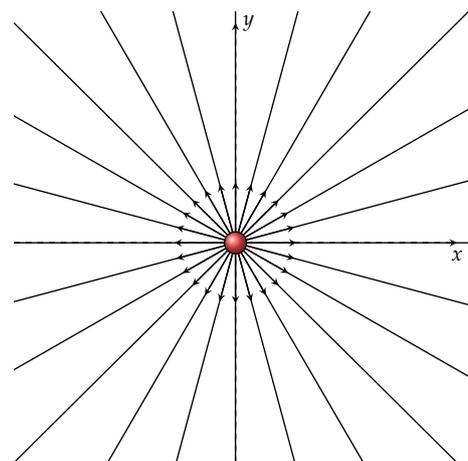
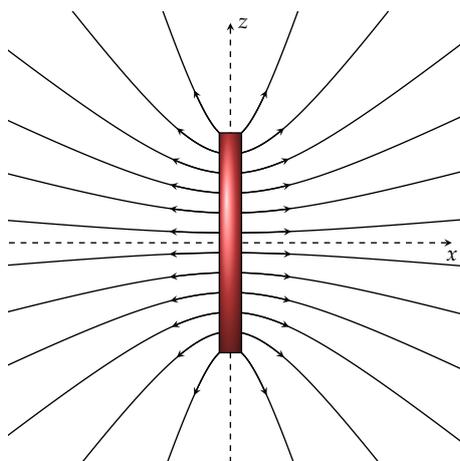


FIGURE 2 – Carte de champ pour un fil uniformément chargé en vue de face (à gauche) et en vue de dessus (à droite).

- (b) cas d'un fil uniformément chargé et de longueur infinie (voir figure 3)

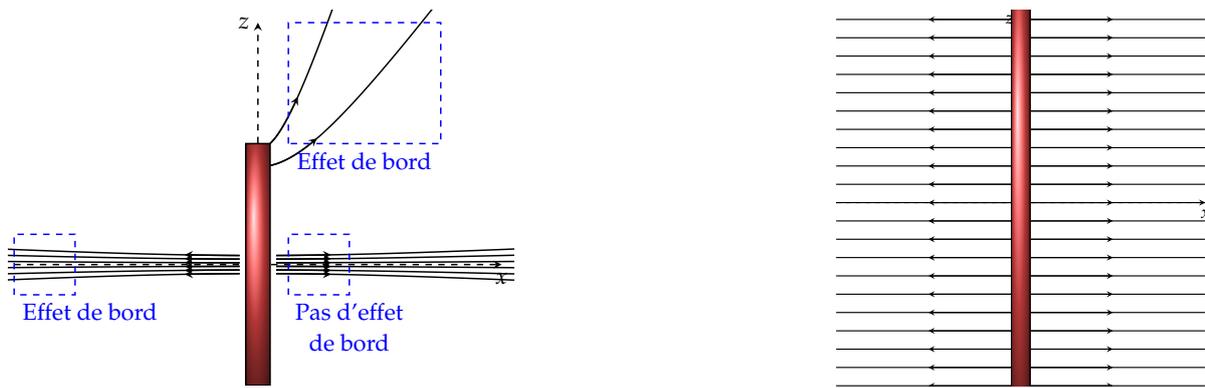


FIGURE 3 – Carte de champ pour un fil uniformément chargé en vue de face. A gauche, le fil de longueur finie et à droite de longueur infinie.

(c) cas du disque uniformément chargé

On considère un disque de rayon  $R$ , de centre  $O$  et appartenant au plan  $(Oxy)$ . Celui-ci porte une densité surfacique de charge uniforme  $\sigma$  (voir figure 4).

**Exercice 2 :**

- i. Préciser les éléments de symétrie de la distribution de charge.
- ii. Pour  $M$  appartenant à l'axe  $Oz$ , on donne :

$$\vec{E} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{u}_z$$

Vérifier l'homogénéité de cette expression et l'accord avec les plans de symétrie.

- iii. Commenter les figures 5 et 6.

(d) champ créé par un plan infini et chargé uniformément en surface

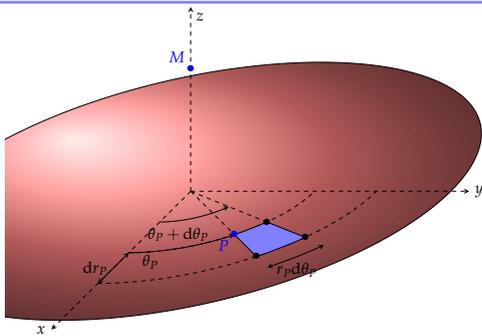


FIGURE 4 – Disque chargé uniformément.

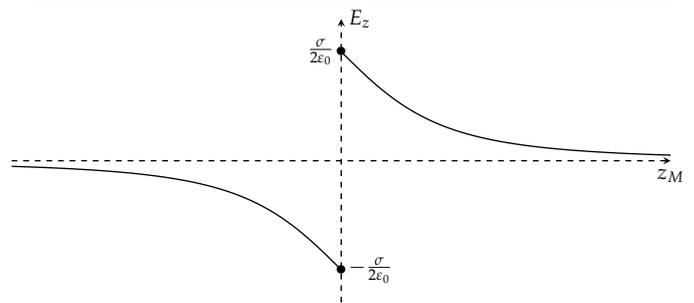


FIGURE 5 – Evolution de  $E_z$  sur l'axe  $(Oz)$ . On a pris  $\sigma > 0$ .

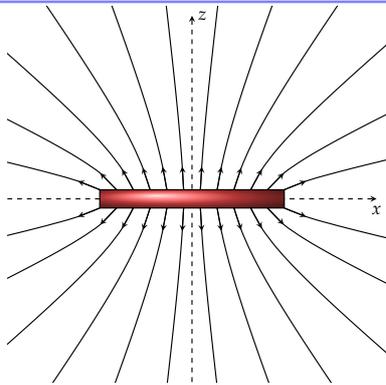


FIGURE 6 – Carte de champ pour le disque chargé uniformément en surface.

---

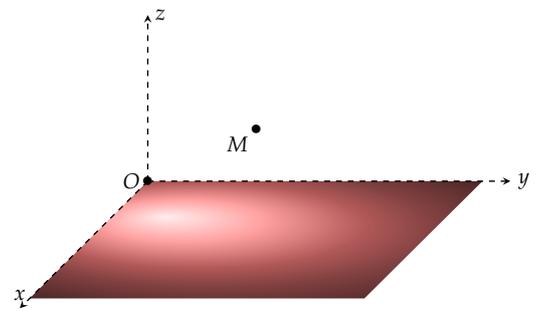


FIGURE 7 – Plan infini et chargé uniformément en surface.

---

## II Filtres analogiques

### 1. Fonction de transfert

- (a) contexte
- (b) fonction de transfert
- (c) ordre d'un filtre et stabilité

### 2. Diagramme de Bode

- (a) Gain du filtre, gain en décibel (dB)
- (b) nature du filtre
- (c) diagramme de Bode

**Capacité exigible :** Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1.

**Capacité exigible :** Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique.

**Remarque :** Dans le cas d'un signal périodique, il faut immédiatement penser à la décomposition harmonique et au théorème de superposition. Le signal en sortie sera la somme des réponses du filtre à chaque harmonique de la décomposition de Fourier.

### 3. Filtre du premier ordre

- (a) filtre passe-bas d'ordre - circuit ( $R, C$ ) (figure 8)

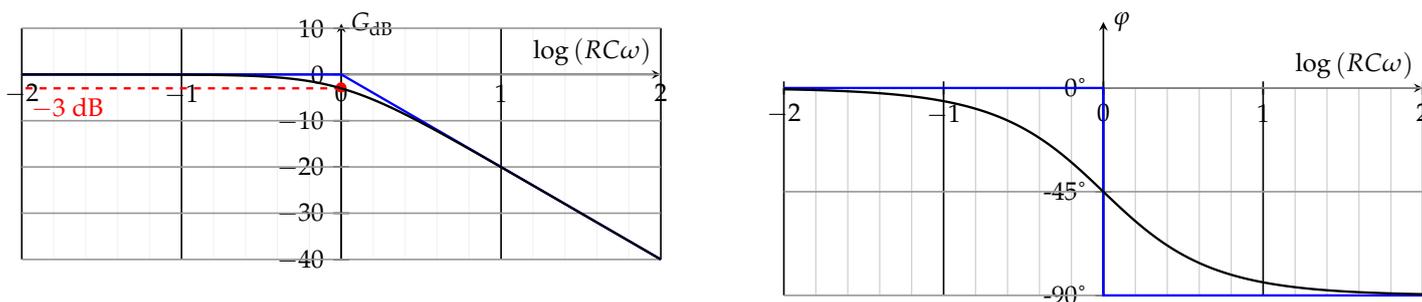


FIGURE 8 – Diagramme de Bode du filtre RC passe-bas. On a tracé en bleu le diagramme asymptotique.

- (b) étude du filtre passe-haut (figure 9)

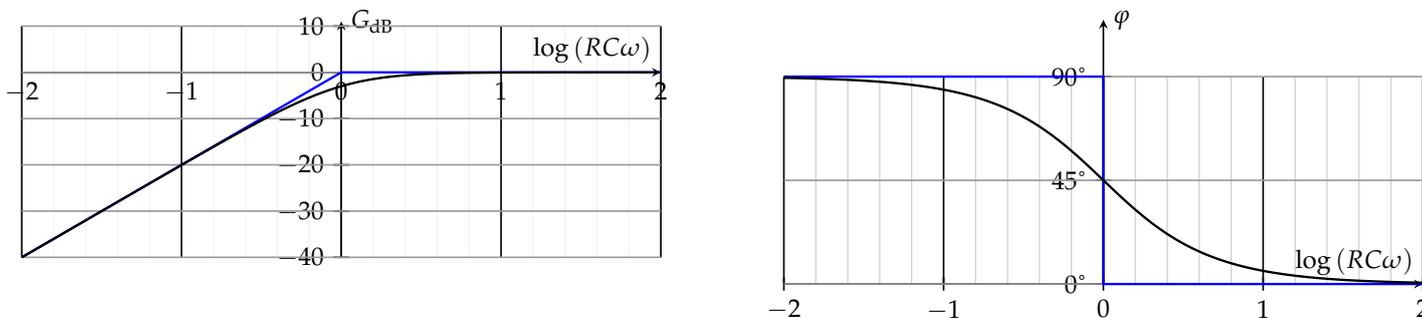


FIGURE 9 – Diagramme de Bode du filtre RC passe-haut. On a rajouté en bleu le diagramme asymptotique.

(c) forme canonique

#### 4. Filtre du second ordre

(a) filtre passe-bas du second ordre - circuit (R,L,C) (voir figure 10)

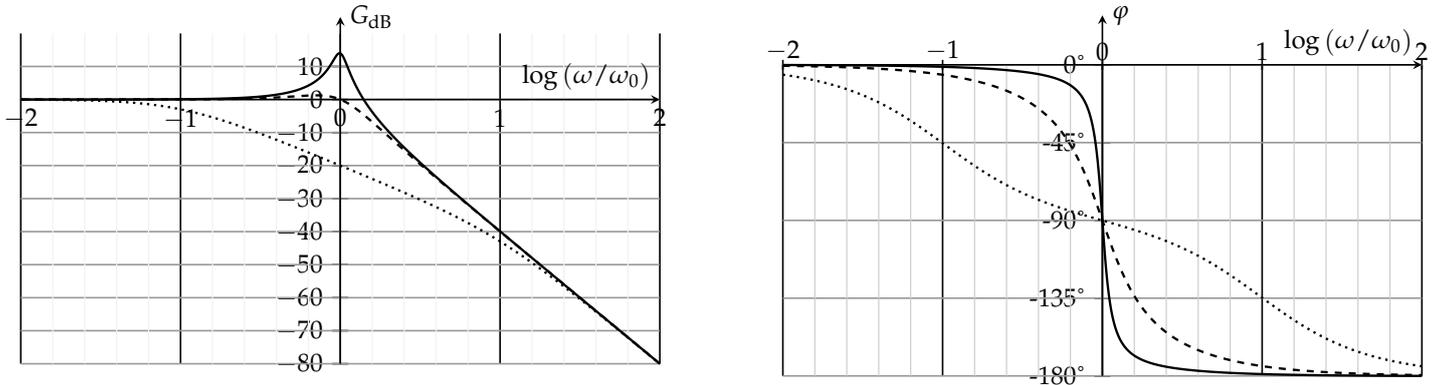


FIGURE 10 – Diagramme de Bode du filtre (R,L,C) passe-bas pour trois valeurs de facteurs de qualité  $Q = 5.0$  en trait plein,  $Q = 1.0$  en tirets et  $Q = 0.1$  en pointillés. On notera qu'il est globalement passe-bas mais qu'il présente une résonance si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Enfin, on remarquera que la décroissance du gain à hautes fréquences se fait avec une pente en  $-40$  dB/décade

(b) filtre passe-bande du second ordre - circuit (R,L,C) (voir figure 11)

**Remarque :** On notera que la fonction de transfert pourra souvent se mettre sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

où  $\omega_0$  est la pulsation de résonance,  $Q$  le facteur de qualité et  $H_0$  la fonction de transfert à la résonance.

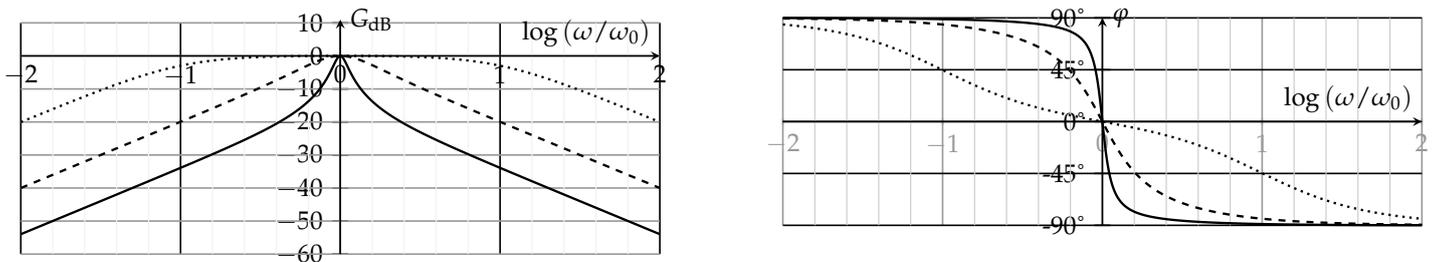


FIGURE 11 – Diagramme de Bode du filtre (R,L,C) passe-bande pour trois valeurs de facteurs de qualités  $Q = 5.0$  en trait plein,  $Q = 1.0$  en tirets et  $Q = 0.1$  en pointillés. On notera l'augmentation de l'acuité (et de ce fait, la diminution de la bande-passante) de la résonance avec le facteur de qualité.

**Capacité exigible :** Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert.

**Remarque :** Il faut noter que les droites sont de pente  $\pm 20$  dB/décade ou  $\pm 40$  dB/décade suivant les cas.

**Capacité exigible :** Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.

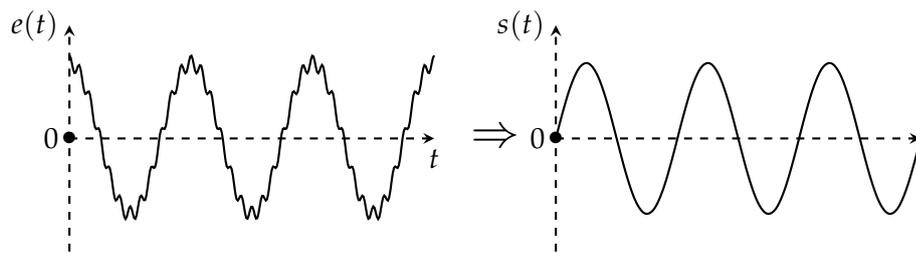
**Traduction :** Suivant le filtrage voulu, il faut pouvoir déterminer la nature du filtre, donner un ordre de grandeur de la fréquence de coupure ou de résonance et, éventuellement, la largeur de la bande passante.

**Capacité exigible :** Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyennneur, intégrateur, ou dérivateur.

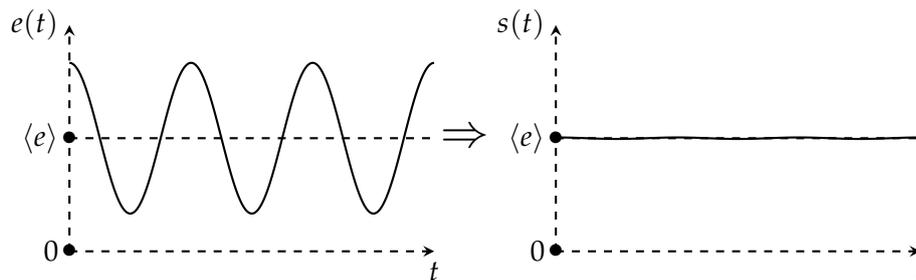
**Explication pour le intégrateur :** Un filtre est du type intégrateur si sa fonction de transfert est du type :  $\underline{H} \propto \frac{1}{j\omega}$ . C'est un filtre instable à basses fréquences. On notera qu'un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure faible sera assimilable à un intégrateur :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_c}} \approx \frac{\omega_c}{j\omega} \propto \frac{1}{j\omega} \text{ pour } \omega_c \ll \omega$$

Il est souvent utilisé pour lisser un signal, c'est-à-dire éliminer les fluctuations rapides de ce signal.



**Explication pour le moyennneur :** Un filtre moyennneur est très proche de l'intégrateur. C'est n'importe quel filtre passe-bas<sup>a</sup> de fréquence de coupure suffisamment basse pour éliminer l'ensemble de la partie alternative d'un signal. Il ne conservera que la composante continue<sup>b</sup>.



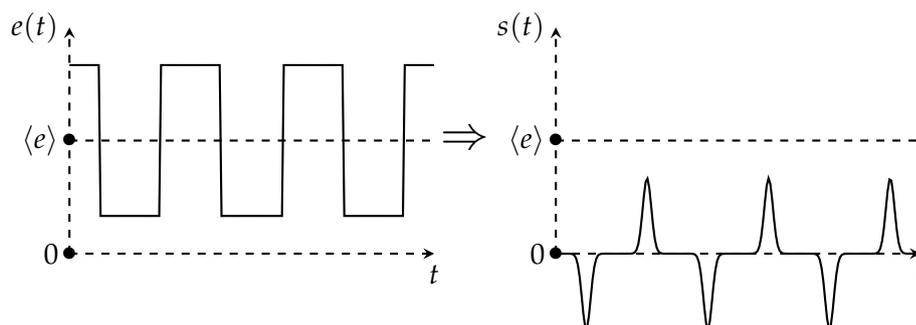
a. Peu importe son ordre

b. c'est-à-dire la valeur moyenne

**Explication pour le dérivateur :** Un filtre est du type dérivateur si sa fonction de transfert est du type :  $\underline{H} \propto j\omega$ . C'est un filtre instable à hautes fréquences. On notera qu'un filtre passe-haut du premier ordre de fréquence de coupure élevée sera assimilable à un dérivateur :

$$\underline{H} = \frac{j\omega}{1 + \frac{j\omega}{\omega_c}} \approx \frac{j\omega}{\omega_c} \propto j\omega \text{ pour } \omega_c \gg \omega$$

Il est souvent utilisé pour créer des impulsions à partir d'un signal rectangulaire.



|| **Capacité exigible :** Expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique (sismomètre, amortisseur, accéléromètre, ...).

|| **Réponse :**

- un sismomètre doit avoir une réponse fidèle à l'onde sismique. On doit éviter qu'il résonne dans la gamme des fréquences sismiques ( $[0,5 \text{ Hz}; 15 \text{ Hz}]$ );
- un amortisseur est un filtre passe-bas à faible facteur de qualité pour éliminer les fréquences élevées;
- pour un accéléromètre, la grandeur en entrée est l'accélération et la grandeur en sortie est généralement une position.

|| **Capacité exigible :** Étudier le filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal à partir d'une analyse spectrale.

|| **Capacité exigible :** Détecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles fréquences.

|| **Capacité numérique :** Simuler, à l'aide d'un langage de programmation, l'action d'un filtre sur un signal périodique dont le spectre est fourni. Mettre en évidence l'influence des caractéristiques du filtre sur l'opération de filtrage.

5. Effet d'un filtre passe-bas sur un signal créneau

6. Effet d'un filtre passe-bande sur un signal créneau