Programme de colle 16

S. Benlhajlahsen $\rightarrow$ *PCSI*$_1$

Semaine du lundi 29 janvier 2024

Sommaire

I Filtres analogiques 1

II Le champ électrique 5

III Moment de force et moment cinétique 8

Au programme cette semaine :

I Filtres analogiques

1. Fonction de transfert
   (a) contexte
   (b) fonction de transfert
   (c) ordre d'un filtre et stabilité
2. Diagramme de Bode
   (a) Gain du filtre, gain en décibel (dB)
   (b) nature du filtre
   (c) diagramme de Bode

> **Capacité exigible :** Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1.

> **Capacité exigible :** Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique.

> **Remarque :** Dans le cas d'un signal périodique, il faut immédiatement penser à la décomposition harmonique et au théorème de superposition. Le signal en sortie sera la somme des réponses du filtre à chaque harmonique de la décompisition de Fourier.

3. Filtre du premier ordre
   (a) filtre passe-bas d'ordre - circuit (R, C) (figure 1)
   (b) étude du filtre passe-haut (figure 2)
   (c) forme canonique
4. Filtre du second ordre
   (a) filtre passe-bas du second ordre - circuit (R,L,C) (voir figure 3)
   (b) filtre passe-bande du second ordre - circuit (R,L,C) (voir figure 4)

   > **Remarque :** On notera que la fonction de transfert pourra souvent se mettre sous la forme :
   >
   > $$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$
   >
   > où ω_0 est la pulsation de résonance, Q le facteur de qualité et H_0 la fonction de transfert à la résonance.

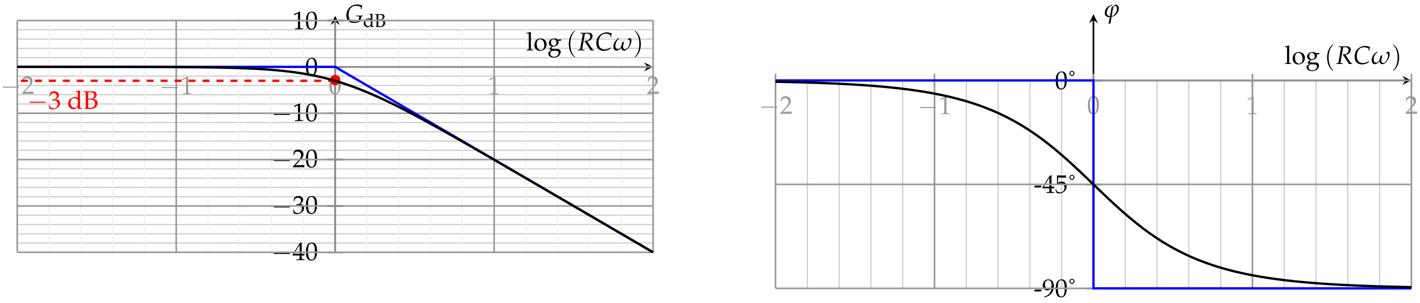


FIGURE 1 – Diagramme de Bode du filtre RC passe-bas. On a tracé en bleu le diagramme asymptotique.

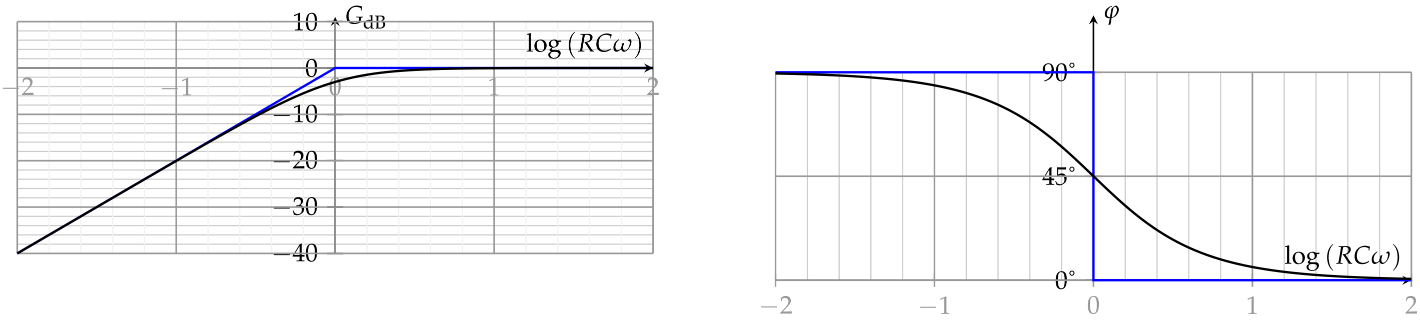


FIGURE 2 – Diagramme de Bode du filtre RC passe-haut. On a rajouté en bleu le diagramme asymptotique.

Capacité exigible : Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert.

Remarque : Il faut noter que les droites sont de pente ±20 dB/décade ou ±40 dB/décade suivant les cas.

Capacité exigible : Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.

Traduction : Suivant le filtrage voulu, il faut pouvoir déterminer la nature du filtre, donner un ordre de grandeur de la fréquence de coupure ou de résonance et, éventuellement, la largeur de la bande passante.

Capacité exigible : Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyenneur, intégrateur, ou dérivateur.

Explication pour le intégrateur : Un filtre est du type intégrateur si sa fonction de transfert est du type : $\underline{H} \propto \frac{1}{j\omega}$. C'est un filtre instable à basses fréquences. On notera qu'un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure faible sera assimilable à un intégrateur :

$$\underline{H} = \frac{1}{1+\frac{j\omega}{\omega_c}} \approx \frac{\omega_c}{j\omega} \propto \frac{1}{j\omega} \text{ pour } \omega_c \ll \omega$$

Il est souvent utilisé pour lisser un signal, c'est-à-dire éliminer les fluctuations rapides de ce signal.

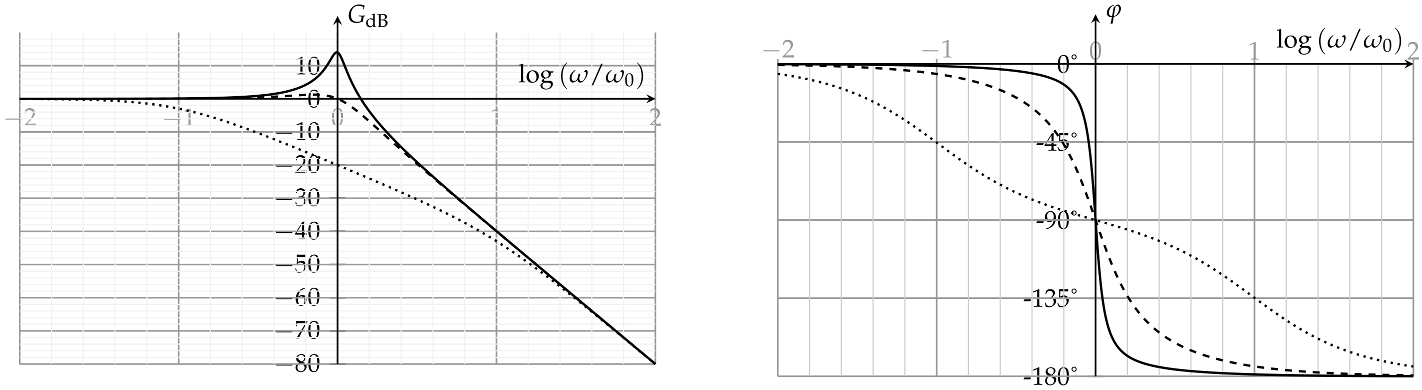


FIGURE 3 – Diagramme de Bode du filtre (R,L,C) passe-bas pour trois valeurs de facteurs de qualité $Q = 5.0$ en trait plein, $Q = 1.0$ en tirets et $Q = 0.1$ en pointillés. On notera qu'il est globalement passe-bas mais qu'il présente une résonance si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Enfin, on remarquera que la décroissance du gain à hautes fréquences se fait avec une pente en -40 dB/décade

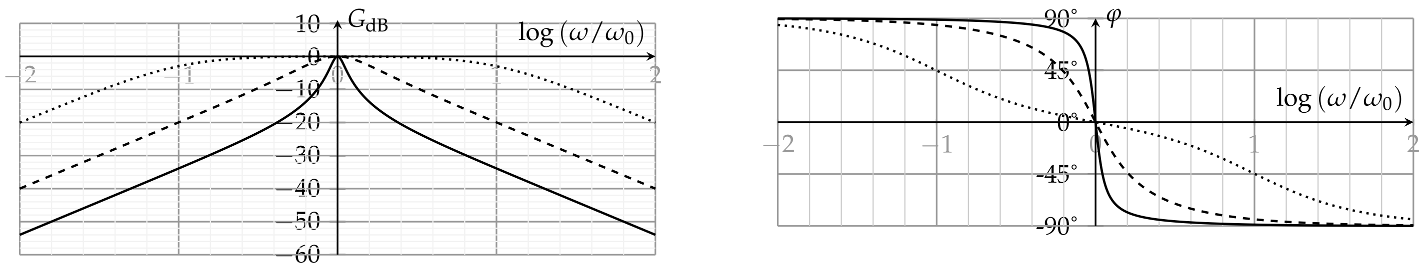
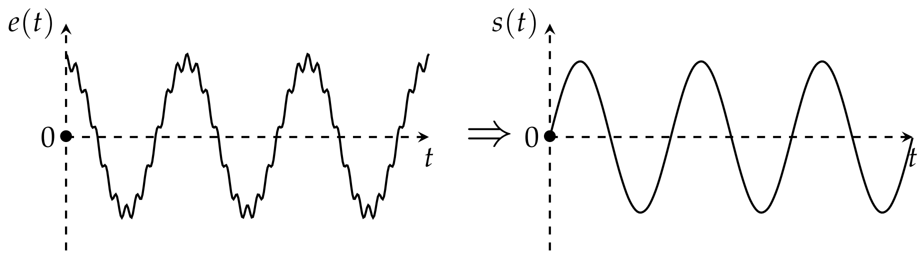
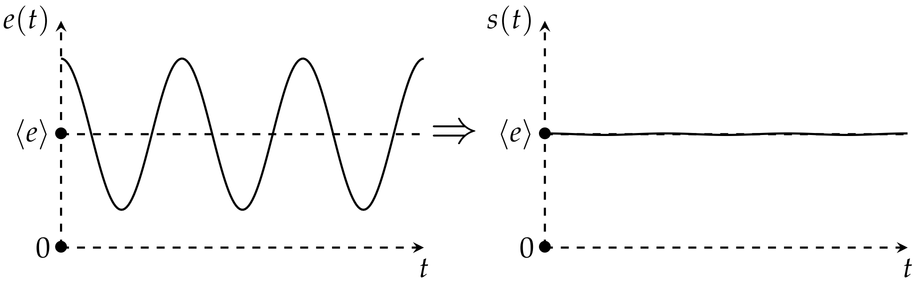


FIGURE 4 – Diagramme de Bode du filtre (R,L,C) passe-bande pour trois valeurs de facteurs de qualités $Q = 5.0$ en trait plein, $Q = 1.0$ en tirets et $Q = 0.1$ en pointillés. On notera l'augmentation de l'acuité (et de ce fait, la diminution de la bande-passante) de la résonance avec le facteur de qualité.



Explication pour le moyenneur : Un filtre moyenneur est très proche de l'intégrateur. C'est n'importe quel filtre passe-bas[a] de fréquence de coupure suffisamment basse pour éliminer l'ensemble de la partie alternative d'un signal. Il ne conservera que la composante continue[b].

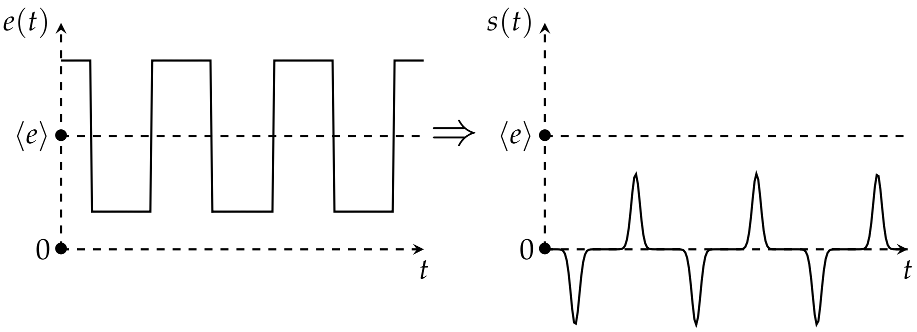


a. Peu importe son ordre
b. c'est-à-dire la valeur moyenne

Explication pour le dérivateur : Un filtre est du type dérivateur si sa fonction de transfert est du type : $\underline{H} \propto j\omega$. C'est un filtre instable à hautes fréquences. On notera qu'un filtre passe-haut du premier ordre de fréquence de coupure élevée sera assimilable à un dérivateur :

$$\underline{H} = \frac{\frac{j\omega}{\omega_c}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_c}} \approx \frac{j\omega}{\omega_c} \propto j\omega \text{ pour } \omega_c \gg \omega$$

Il est souvent utilisé pour créer des impulsions à partir d'un signal rectangulaire.



Capacité exigible : Expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique (sismomètre, amortisseur, accéléromètre, ...).

Réponse :

- un sismomètre doit avoir une réponse fidèle à l'onde sismique. On doit éviter qu'il résonne dans la gamme des fréquences sismiques ([0,5 Hz; 15 Hz]) ;
- un amortisseur est un filtre passe-bas à faible facteur de qualité pour éliminer les fréquences élevées ;
- pour un accéléromètre, la grandeur en entrée est l'accélération et la grandeur en sortie est généralement une position.

Capacité exigible : Étudier le filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal à partir d'une analyse spectrale.

Capacité exigible : Détecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles fréquences.

Capacité numérique : Simuler, à l'aide d'un langage de programmation, l'action d'un filtre sur un signal périodique dont le spectre est fourni. Mettre en évidence l'influence des caractéristiques du filtre sur l'opération de filtrage.

5. Effet d'un filtre passe-bas sur un signal créneau
6. Effet d'un filtre passe-bande sur un signal créneau

II Le champ électrique

1. La charge électrique
2. Distribution de charge
   (a) distribution de charge discrète
   (b) choix de l'échelle
   (c) distribution volumique de charge
   (d) distribution surfacique de charge
   (e) distribution linéique de charge
3. Champ électrostatique
   (a) interaction entre deux charges ponctuelles
   (b) champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

> **Capacité exigible - programme PC :** Loi de Coulomb. Champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle. Principe[a] de superposition.
> Exprimer le champ électrostatique créés par une distribution discrète de charges.
> Citer quelques ordres de grandeur de champs électrostatiques.
>
> *a.* ou plutôt théorème

   (c) ligne du champ électrostatique (ldc) et carte de champ

> **Capacité exigible - programme PC :** Justifier qu'une carte de lignes de champ puisse ou non être celle d'un champ électrostatique.
> Repérer, sur une carte de champ électrostatique, d'éventuelles sources du champ et leur signe. Associer l'évolution de la norme du champ électrostatique à l'évasement des tubes de champ loin des sources.

> **Capacité exigible - programme PSI :** Associer l'évasement des tubes de champ à l'évolution de la norme du champ électrique en dehors des sources.

> **Réponse :** On retiendra quelques idées simples :
> - Les lignes de champ électrique ont tendance à diverger depuis les charges positives et à converger vers les charges négatives.
> - Lorsqu'on s'éloignent des charges, les lignes de champ s'évasent à cause d'une diminution de champ électrique[a] ;
> - enfin, contrairement aux lignes du champ magnétiques, les lignes du champ électrique ne sont pas nécessairement fermée.
>
> *a.* Voir la conservation du flux du champ électrique dans une zone vide de charge.

4. Symétrie et invariance d'une distribution

> **Capacité exigible - programme PC :** Exploiter les propriétés de symétrie des sources (translation, rotation, symétrie plane, conjugaison de charges) pour prévoir des propriétés du champ créé.

> **Capacité exigible - programme PSI :** Exploiter les symétries et invariances d'une distribution de charges pour en déduire des propriétés du champ électrique.

   (a) distribution de charge présentant un plan de symétrie
   (b) distribution de charge présentant un plan d'antisymétrie
   (c) invariance par translation
   (d) invariance par rotation autour de (Oz)
   (e) propriété de symétrie du champ électrique
5. Analyse de quelques champs
   (a) cas d'un fil uniformément chargé et de longueur finie

> **Contexte** On considère un fil de longueur $2a$ colinéaire à l'axe (Oz) et portant une densité linéique de charge uniforme λ (voir figure 5). Ainsi, ce fil porte une charge totale : $Q = \displaystyle\int_{z_P=-a}^{a} \lambda \, \mathrm{d}z_P = 2a\lambda$. On cherche l'expres-

sion du champ électrique créé par ce fil en un point M de son plan médiateur. On prend M sur l'axe (Ox).

Exercice 1 :

i. Préciser les éléments de symétrie de cette distribution de charge.

ii. On donne en figure 6 la carte du champ électrique. Que constate-t-on ?

iii. On donne le champ électrique créé par ce fil en un point M appartenant à l'axe (Ox) s'écrit :

$$\overrightarrow{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2a}{x_M \cdot \sqrt{a^2 + x_M^2}} \overrightarrow{u_x}$$

Vérifier l'homogénéité de cette expression et l'accord avec les plans de symétrie.

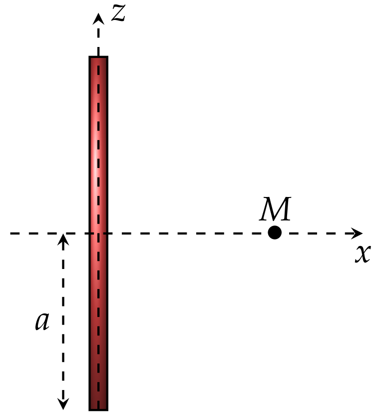


FIGURE 5 – Fil fini chargé uniformément.

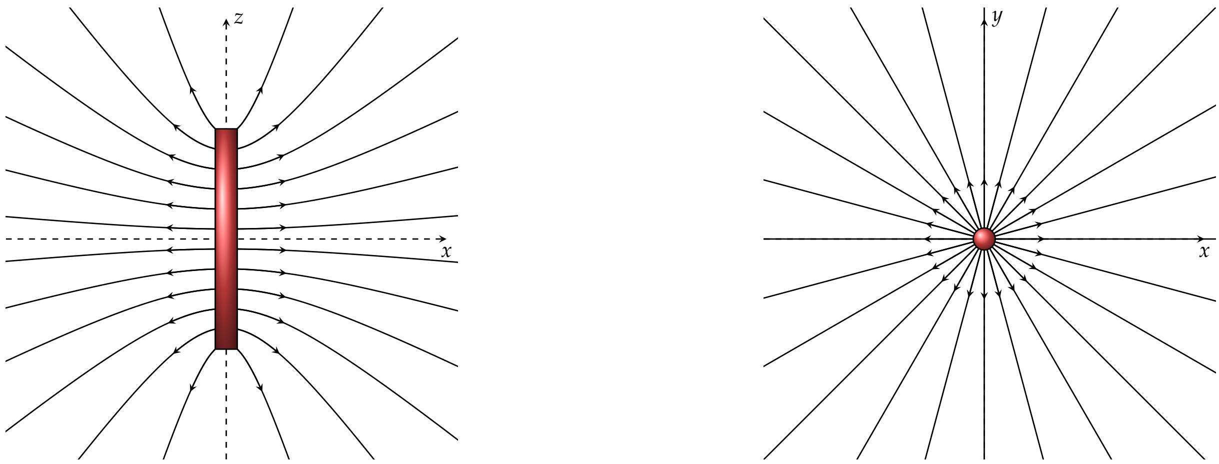


FIGURE 6 – Carte de champ pour un fil uniformément chargé en vue de face (à gauche) et en vue de dessus (à droite).

(b) cas d'un fil uniformément chargé et de longueur infinie (voir figure 7)

(c) cas du disque uniformément chargé

On considère un disque de rayon R, de centre O et appartenant au plan (Oxy). Celui-ci porte une densité surfacique de charge uniforme σ (voir figure 8).

Exercice 2 :

i. Préciser les éléments de symétrie de la distribution de charge.

ii. Pour M appartenant à l'axe Oz, on donne :

$$\overrightarrow{E} = \frac{\sigma\, z}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \overrightarrow{u_z}$$

Vérifier l'homogénéité de cette expression et l'accord avec les plans de symétrie.

iii. Commenter les figures 9 et 10.

(d) champ créé par un plan infini et chargé uniformément en surface

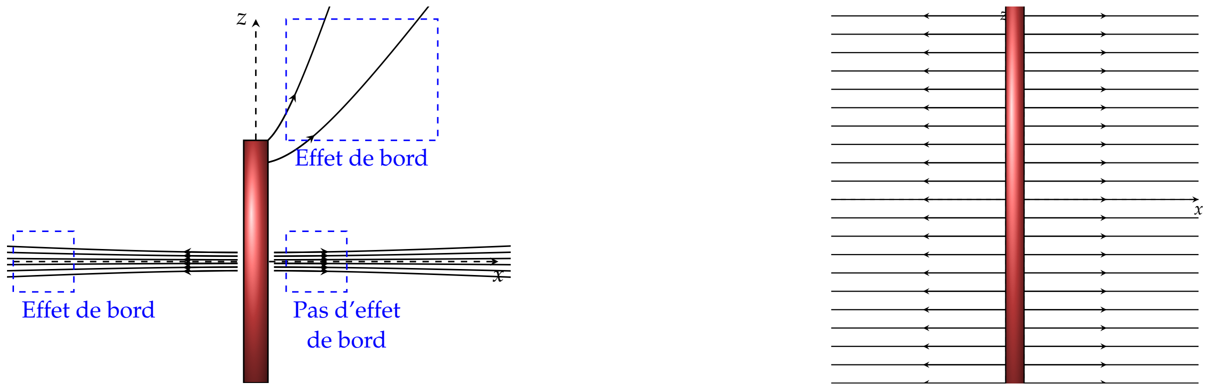


FIGURE 7 – Carte de champ pour un fil uniformément chargé en vue de face. A gauche, le fil de longueur finie et à droite de longueur infinie.

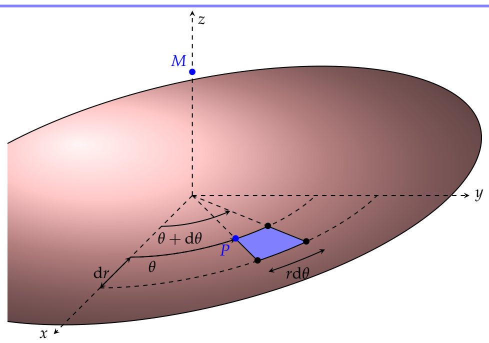


FIGURE 8 – Disque chargé uniformément.

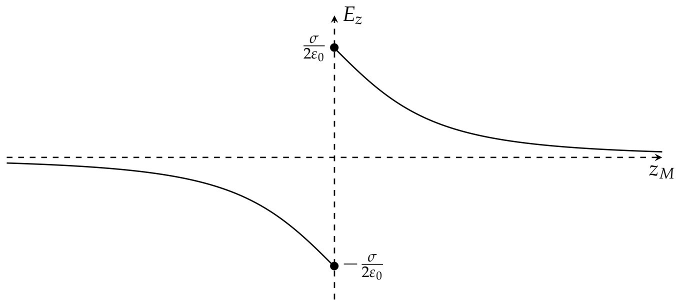


FIGURE 9 – Evolution de E_z sur l'axe (Oz). On a pris $\sigma > 0$.

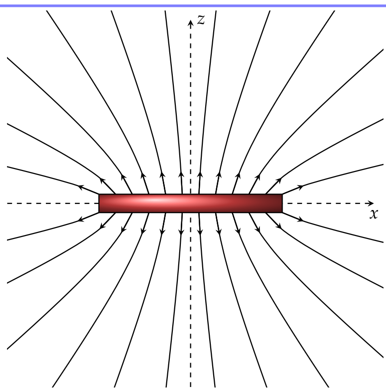


FIGURE 10 – Carte de champ pour le disque chargé uniformément en surface.

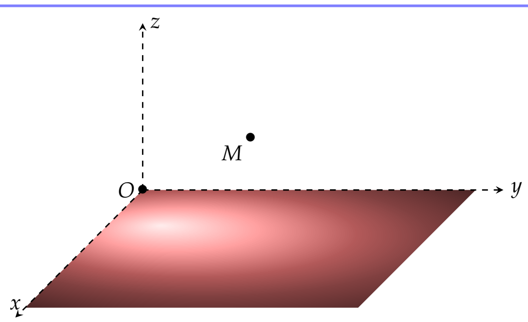


FIGURE 11 – Plan infini et chargé uniformément en surface.

III Moment de force et moment cinétique

1. Rappel sur le produit vectoriel
2. Moment d'une force
   (a) Moment d'une force par rapport à un point O
   (b) Moment d'une force par rapport à un axe

   Capacité exigible : Utiliser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.

   (c) Notion de bras de levier

   Capacité exigible : Exprimer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.

   Réponse : Le bras de levier est la distance d entre l'axe de rotation et le support de la force (voir figures 12 et 13). Dans ce cas, $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O\left(\overrightarrow{F}\right) = \pm d \cdot \left\|\overrightarrow{F}\right\| \overrightarrow{u_z}$.

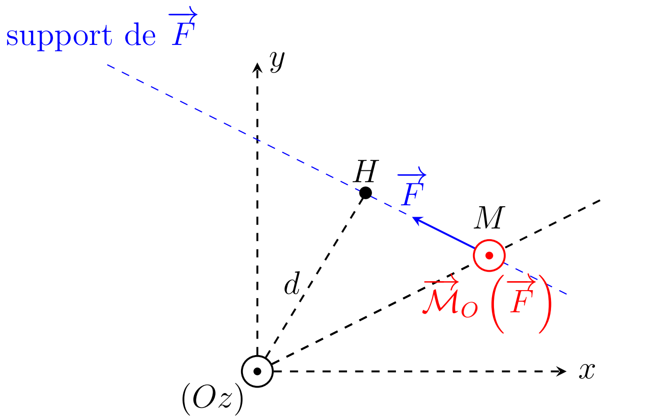


FIGURE 12 – moment de force. La force a tendance à faire tourner M dans le sens positif.

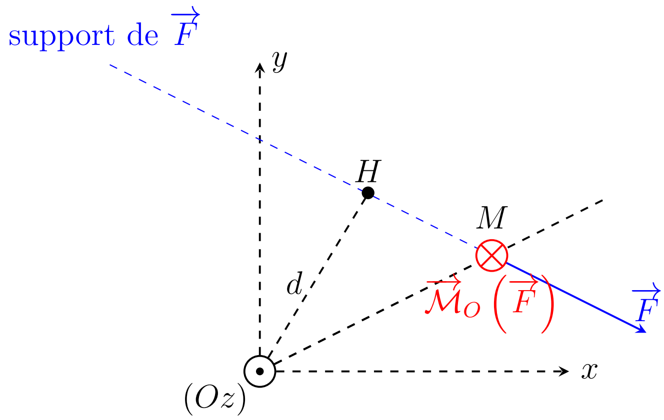


FIGURE 13 – moment de force. La force a tendance à faire tourner M dans le sens négatif.

3. Moment cinétique d'un point matériel
   (a) Moment cinétique par rapport à un point O
   (b) Moment cinétique par rapport à un axe
   (c) Moment d'inertie J
   (d) Énergie cinétique pour un mouvement de rotation circulaire
4. Analogie entre translation et rotation
5. Loi du moment cinétique (TMC)
   (a) Loi du moment cinétique en un point fixe
   (b) Loi du moment cinétique scalaire

   Capacité exigible : Identifier les cas de conservation du moment cinétique.

   Réponse : C'est le cas d'un système isolé ou soumis à des forces de moments nuls. Le cas d'une force centrale ($\overrightarrow{F} \parallel \overrightarrow{OM}$) est étudié en détail dans le chapitre sur le mouvement des planètes dans le système solaire.

6. Équilibre et stabilité
   (a) Condition de l'équilibre
   (b) Condition de la stabilité