Programme de colle 8

S. Benlhajlahsen → PCSI$_1$

Semaine du lundi 18 Novembre 2024

Sommaire

Au programme cette semaine :

I Circuit linéaire du second ordre

- Circuit (R,L,C) série
  On considère le montage de la figure 1. On ferme l'interrupteur à $t = 0$ et on suppose que le condensateur est initialement déchargé.

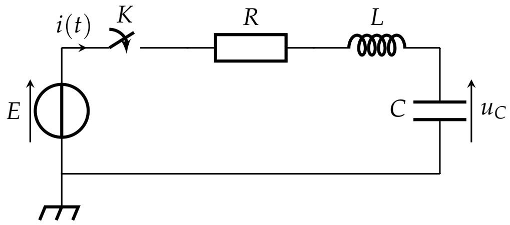

FIGURE 1 – Circuit (R,L,C) pour la charge du condensateur.

> **Capacité exigible :** Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.

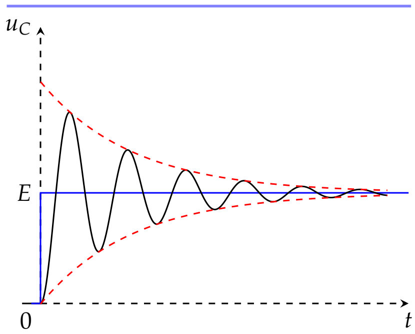

FIGURE 2 – Régime pseusopériodique d'une charge de condensateur.

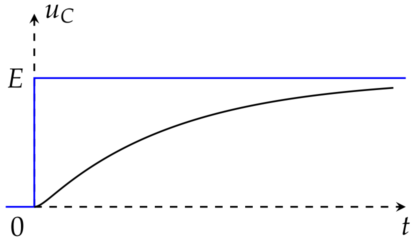

FIGURE 3 – Régime apériodique d'une charge de condensateur.

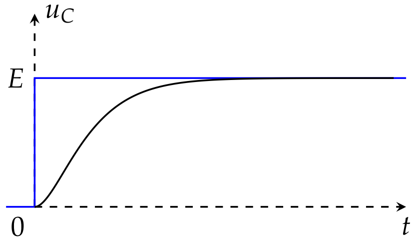

FIGURE 4 – Régime critique d'une charge de condensateur.

> **Capacité exigible :** Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.

Réponse :
- Un bilan de puissance pour la charge donne :

$$\forall t > 0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2\right] = E\,i - R\,i^2$$

L'énergie électromagnétique dans le circuit sera tendanciellement augmentée par le générateur et sera diminuée par la résistance.
- Un bilan de puissance pour la décharge donne :

$$\forall t > 0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2\right] = -R\,i^2 \leqslant 0$$

Autrement dit, la résistance va produire une diminution irrémédiable de des énergies électromagnétiques stockées dans le condensateur et la bobine.

Capacité exigible : Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.

Réponse : Dans le cas d'un régime transitoire d'ordre deux, l'équation différentielle peut se mettre sous la forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u(t) = \text{second membre} \qquad \text{(cours de physique)}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\xi\omega_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u(t) = \text{second membre} \qquad \text{(cours de SII)}$$

où :
- Q le facteur de qualité (facteur sans dimension) ;
- ω_0 est la pulsation propre : c'est la pulsation obtenue lorsqu'il n'y a pas d'amortissement[a] ;
- $\xi = \frac{1}{2Q}$ le facteur d'amortissement.

a. C'est donc la pulsation de l'oscillateur harmonique associé.

Capacité exigible : Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité.

Réponse : On distinguera :
- le régime pseudo-périodique obtenu pour $Q > \frac{1}{2}$: c'est un régime de faible amortissement où le « retour à l'équilibre » se fait *via* une oscillation amortie ;
- le régime apériodique obtenu pour $Q < \frac{1}{2}$: c'est un régime d'amortissement élevé ;
- le régime critique qui est la situation où $Q = \frac{1}{2}$

Capacité exigible : Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique.

Capacité exigible : Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité.

Réponse : Le temps caractéristique du régime transitoire est $\tau = \dfrac{1}{\xi\omega_0} = \dfrac{2Q}{\omega_0}$. En effet, ces différents régimes s'atténue comme $\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \exp\left(-\frac{\omega_0\,t}{2Q}\right)$.

II Lois de Newton

- Masse d'un système. Conservation de la masse pour système fermé.

> **Capacité exigible :** Exploiter la conservation de la masse pour un système fermé.

> **Remarque :** Un système fermé est un système qui n'échange pas de masse avec l'extérieur.

- Quantité de mouvement d'un point et d'un système de points. Lien avec la vitesse du centre de masse d'un système fermé.

> **À retenir :** La quantité de mouvement[a] d'un point M de masse en mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}$ est le vecteur :
>
> $$\overrightarrow{p}\,(M/\mathcal{R}) = m\,\overrightarrow{v}\,(M/\mathcal{R})$$
>
> a. *linear momentum* en anglais.

> **Capacité exigible :** Établir l'expression de la quantité de mouvement pour un système de deux points sous la forme $\overrightarrow{p} = m\,\overrightarrow{v}\,(G/\mathcal{R})$.

> **Réponse :** Dans le cas d'un système $\mathcal{S}$ formé de masses ponctuelles m_1 et m_2 (voir figure 5), la quantité de mouvement s'écrit :
>
> $$\overrightarrow{p}\,(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \overrightarrow{p}\,(M_1/\mathcal{R}) + \overrightarrow{p}\,(M_2/\mathcal{R}) = m_1\,\overrightarrow{v}\,(M_1/\mathcal{R}) + m_2\,\overrightarrow{v}\,(M_2/\mathcal{R})$$
>
> On peut définit le centre de masse G du système par :
>
> $$\overrightarrow{0} = m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} \Longleftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2}$$
>
> En dérivant cette relation, on obtient alors :
>
> $$\overrightarrow{v}\,(G/\mathcal{R}) = \frac{m_1\,\overrightarrow{v}\,(M_1/\mathcal{R}) + m_2\,\overrightarrow{v}\,(M_2/\mathcal{R})}{m_1 + m_2}$$
>
> puis
>
> $$\overrightarrow{p}\,(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \overrightarrow{p}\,(M_1/\mathcal{R}) + \overrightarrow{p}\,(M_2/\mathcal{R}) = (m_1 + m_2)\,\overrightarrow{v}\,(G/\mathcal{R})$$
>
> Ainsi, la quantité de mouvement du système est la quantité de mouvement du centre de masse G auquel on a affecté toute la masse.

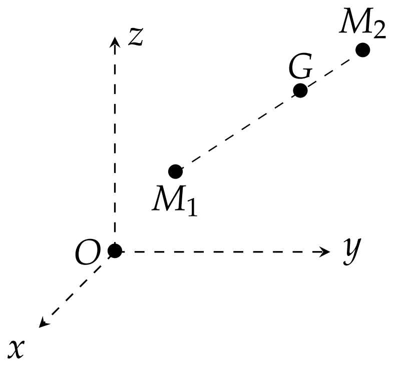

FIGURE 5 – Système $\mathcal{S}$ formé de deux masses ponctuelles. G est son centre de masse.

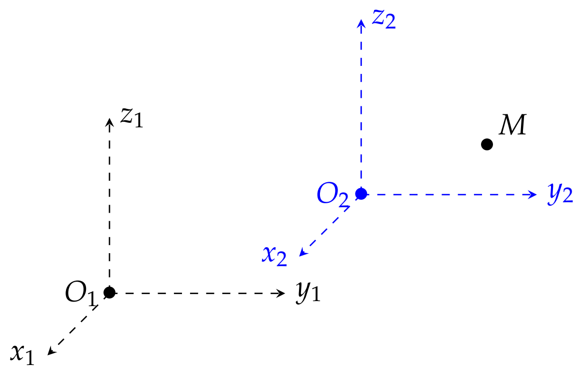

FIGURE 6 – Deux référentiels $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$.

- Première loi de Newton : principe d'inertie. Référentiels galiléens.

> **Capacité exigible :** Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens.

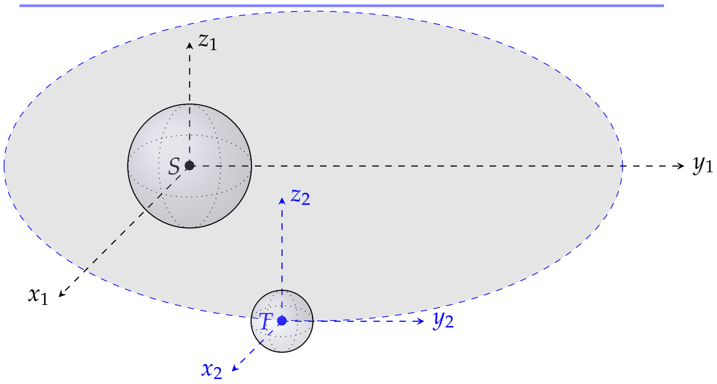

FIGURE 7 – Référentiels héliocentrique et géocentrique. On a ranjouté en gris le plan de l'écliptique.

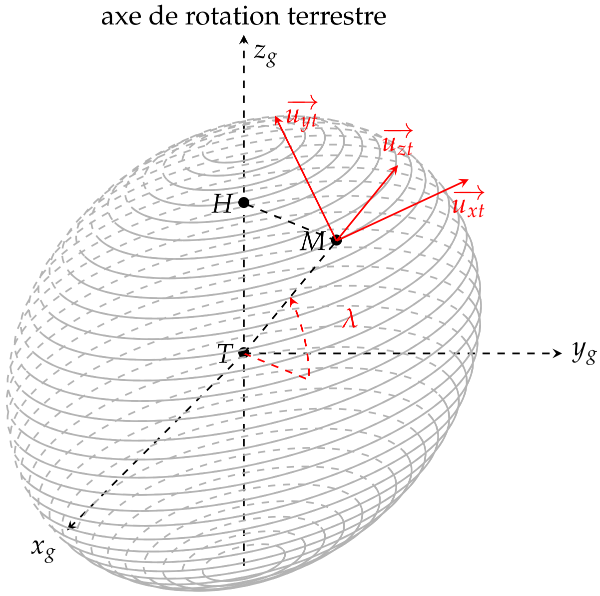

FIGURE 8 – Référentiel terrestre en rouge. λ est la latitude.

À retenir Il existe une classe de référentiels, appelés référentiels galiléens, dans lesquels, un point matériel isolé ou pseuso-isolé est en mouvement rectiligne uniforme.

Remarque : Dans un référentiel considéré galiléen, on dira que le **principe d'inertie** ou **première loi de Newton** s'applique.

Remarque : Le choix du référentiel galiléen n'a pas de conséquence sur le principe d'inertie. En effet, deux référentiels galiléens $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ galiléens sont en translation rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre (voir figure 6). Ainsi, les vitesses de M par rapport aux référentiels $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ vérifient :

$$\overrightarrow{v}\,(M/\mathcal{R}_1) = \overrightarrow{v}\,(M/\mathcal{R}_2) + \overrightarrow{v_e}$$

où $\overrightarrow{v_e}$ est la vitesse de translation $\mathcal{R}_2$ par rapport à $\mathcal{R}_1$ qui est constante au cours du temps. Si on dérive la loi de composition des vitesses précédente, on obtient :

$$\overrightarrow{a}\,(M/\mathcal{R}_1) = \overrightarrow{a}\,(M/\mathcal{R}_2)$$

- Notion de force. Troisième loi de Newton.

  Capacité exigible : Établir un bilan des forces sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur un schéma.

- Deuxième loi de Newton. Théorème[1] de la quantité de mouvement.

  Capacité exigible : Déterminer les équations du mouvement d'un point matériel ou du centre de masse d'un système fermé dans un référentiel galiléen.

- Force de gravitation. Modèle du champ de pesanteur uniforme au voisinage de la surface d'une planète. Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme.

  Remarque Le poids est **légèrement différent** de la force de gravitation par suite de la rotation de la Terre. Si on note G la constante de gravitation, M_T la masse de la Terre,R_T le rayon de la Terre, Ω_T le taux de rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique et λ la latitude du point sur le sol sous la forme :

$$\overrightarrow{g} = -\frac{GM_T}{R_T^2}\overrightarrow{u_{zg}} - \overrightarrow{a_e} = -\frac{GM_T}{R_T^2}\overrightarrow{u_{zg}} + \Omega_T^2 \cdot \overrightarrow{HM}$$

1. loi

Le point H étant le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation terrestre (voir figure 8).

Capacité exigible : Etudier le mouvement d'un système modélisé par un point matériel dans un champ de pesanteur uniforme en l'absence de frottement.

- Modèles d'une force de frottement fluide. Influence de la résistance de l'air sur un mouvement de chute.

Capacité exigible : Exploiter, sans la résoudre analytiquement, une équation différentielle : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite, utilisation des résultats obtenus par simulation numérique. Écrire une équation adimensionnée.

- Modèle linéaire de l'élasticité d'un matériau.

Capacité exigible : Modéliser un comportement élastique par une loi de force linéaire ; extraire une constante de raideur et une longueur à vide à partir de données mesurées ou fournies. Analyser la limite d'une modélisation linéaire à partir de documents expérimentaux.

- Tension d'un fil. Pendule simple.

Capacité exigible : Établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.

- Modèle des lois de frottement de glissement : lois de Coulomb.

Capacité exigible : Exploiter les lois de Coulomb fournies dans les trois situations : équilibre, mise en mouvement, freinage. Formuler une hypothèse (quant au glissement ou non) et la valider.

Lois de Coulomb Coulomb établit le premier des lois simples du frottement sec[a]. Si on étudie le mouvement du solide $\mathcal{S}_1$ par rapport au solide $\mathcal{S}_2$. Le solide support $\mathcal{S}_2$ exerce sur le solide $\mathcal{S}_1$ des actions de contact appelés **réaction du support** $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}_\mathrm{N} + \overrightarrow{R}_\mathrm{T}$ (voir figure 9) qui se décompose en :

— la **réaction normale** $\overrightarrow{R}_\mathrm{N}$ dirigée généralement du support vers le solide étudié[b] tant qu'il y a contact entre les deux solides. Le contact cesse dès lors que $\left\|\overrightarrow{R}_\mathrm{N}\right\| = 0$.

— la **réaction tangentielle** ou **force de frottement solide** qui appartient au plan tangent au contact entre les deux solides.

— si les solides glissent l'un par rapport à l'autre alors :

$$\left\|\overrightarrow{R}_\mathrm{T}\right\| = f_d \cdot \left\|\overrightarrow{R}_\mathrm{N}\right\|$$

où f_d est le coefficient de frottement dynamique.

— dans un cas de non-glissement :

$$\left\|\overrightarrow{R}_\mathrm{T}\right\| < f_s \cdot \left\|\overrightarrow{R}_\mathrm{N}\right\|$$

où f_s est le coefficient de frottement statique.

Le glissement s'amorce alors lorsque :

$$\left\|\overrightarrow{R}_\mathrm{T}\right\| = f_s \cdot \left\|\overrightarrow{R}_\mathrm{N}\right\|$$

a. en reprenant une partie des travaux de Guillaume Amontons.
b. ici, le solide $\mathcal{S}_1$.

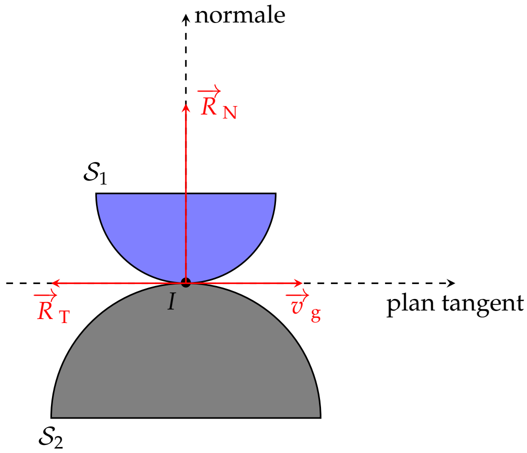

FIGURE 9 – Contact entre deux solides.