Programme de colle 8

S. Benlhajlahsen → *PCSI*$_1$

Semaine du lundi 20 novembre 2023

Sommaire

I Circuit linéaire du second ordre **1**

II Description et paramétrage du mouvement d'un point **3**

Au programme cette semaine :

I Circuit linéaire du second ordre

- Circuit (R,L,C) série
  On considère le montage de la figure 1. On ferme l'interrupteur à $t = 0$ et on suppose que le condensateur est initialement déchargé.

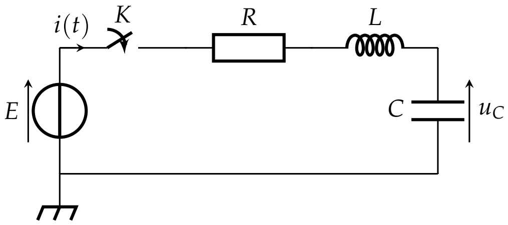

FIGURE 1 – Circuit (R,L,C) pour la charge du condensateur.

> **Capacité exigible :** Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.

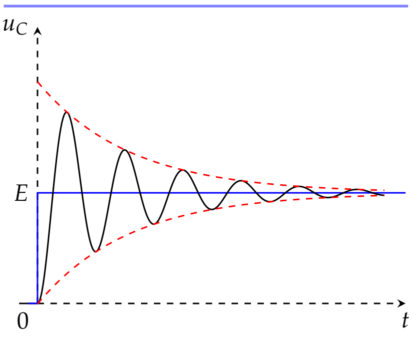

FIGURE 2 – Régime pseusopériodique d'une charge de condensateur.

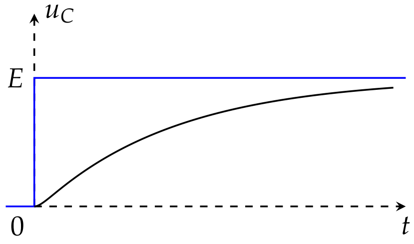

FIGURE 3 – Régime apériodique d'une charge de condensateur.

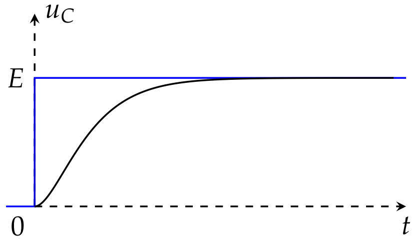

FIGURE 4 – Régime critique d'une charge de condensateur.

> **Capacité exigible :** Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.

Réponse :

— Un bilan de puissance pour la charge donne :

$$\forall t > 0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2\right] = E \cdot i - R \cdot i^2$$

L'énergie électromagnétique dans le circuit sera tendanciellement augmentée par le générateur et sera diminuée par la résistance.

— Un bilan de puissance pour la décharge donne :

$$\forall t > 0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2\right] = -R \cdot i^2 \leqslant 0$$

Autrement dit, la résistance va produire une diminution irrémédiable de des énergies électromagnétiques stockées dans le condensateur et la bobine.

Capacité exigible : Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.

Réponse : Dans le cas d'un régime transitoire d'ordre deux, l'équation différentielle peut se mettre sous la forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u(t) = \text{second membre} \qquad \text{(cours de physique)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\xi\omega_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u(t) = \text{second membre} \qquad \text{(cours de SII)}$$

où :

— Q le facteur de qualité (facteur sans dimension) ;

— ω_0 est la pulsation propre : c'est la pulsation obtenue lorsqu'il n'y a pas d'amortissement [a] ;

— $\xi = \frac{1}{2Q}$ le facteur d'amortissement.

a. C'est donc la pulsation de l'oscillateur harmonique associé.

Capacité exigible : Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité.

Réponse : On distinguera :

— le régime pseudo-périodique obtenu pour $Q > \frac{1}{2}$: c'est un régime de faible amortissement où le « retour à l'équilibre » se fait *via* une oscillation amortie ;

— le régime apériodique obtenu pour $Q < \frac{1}{2}$: c'est un régime d'amortissement élevé ;

— le régime critique qui est la situation où $Q = \frac{1}{2}$

Capacité exigible : Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique.

Capacité exigible : Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité.

Réponse : Le temps caractéristique du régime transitoire est $\tau = \dfrac{1}{\xi\omega_0} = \dfrac{2Q}{\omega_0}$. En effet, ces différents régimes s'atténue comme $\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \exp\left(-\frac{\omega_0 \cdot t}{2Q}\right)$.

II Description et paramétrage du mouvement d'un point

Capacité exigible : Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.

Réponse : À une vitesse proche de la vitesse de la lumière ou près d'un astre massif, on entre dans le cadre relativiste et la mesure du temps ou de l'espace dépend du référentiel.

II.A Cinématique du point

- Description du mouvement d'un point. Nécessité de trois coordonnées d'espace.
- Vecteurs position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$ et accélération $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$.
- Systèmes de coordonnées.

$$\vec{r} = x\vec{u_x} + y\vec{u_y} + z\vec{u_z}$$
$$\vec{v} = \dot{x}\vec{u_x} + \dot{y}\vec{u_y} + \dot{z}\vec{u_z}$$
$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{u_x} + \ddot{y}\vec{u_y} + \ddot{z}\vec{u_z}$$

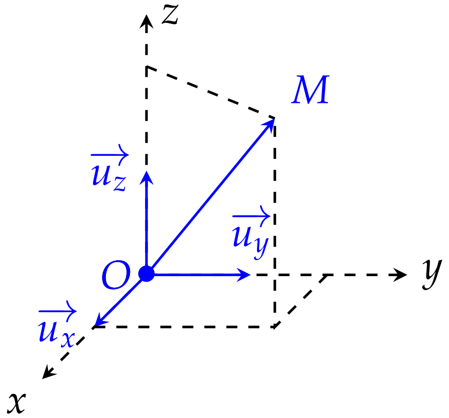

FIGURE 5 – Coord. cartésiennes.

$$\vec{r} = r\vec{u_r} + z\vec{u_z}$$
$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{z}\vec{u_z}$$
$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{u_\theta} + \ddot{z}\vec{u_z}$$

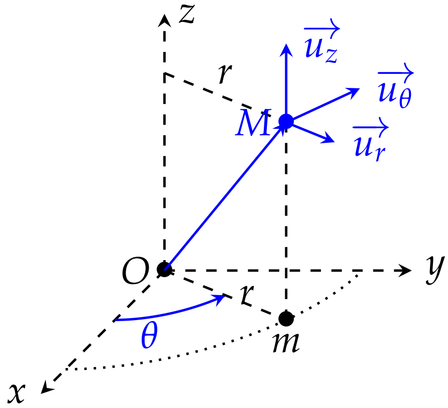

FIGURE 6 – Coord. cylindriques.

$$\vec{r} = r\vec{u_r}$$
$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} + r\sin(\theta)\,\dot{\varphi}\vec{u_\varphi}$$

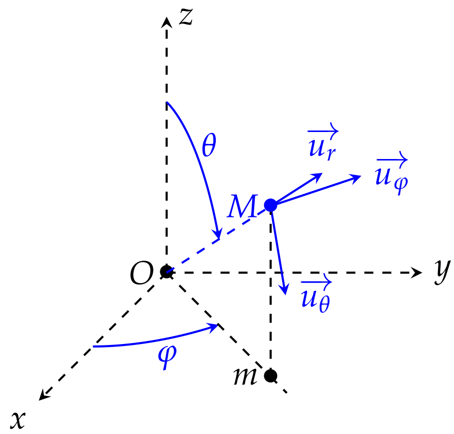

FIGURE 7 – Coord. sphériques.

Capacité exigible : Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.

Capacité exigible : Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au problème.

- déplacements élémentaires
- Mouvement à vecteur accélération constant.

  Capacité exigible : Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps. Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.

- Mouvement circulaire uniforme et non uniforme.

  Capacité exigible : Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes.

  Remarque : Un mouvement circulaire uniforme a une norme de vitesse constante mais une accélération non-nulle.

- Repérage d'un point dont la trajectoire est connue. Vitesse et accélération dans le repère de Frenet pour une trajectoire plane.

$\overrightarrow{d\ell} = dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y} + dz\overrightarrow{u_z}$

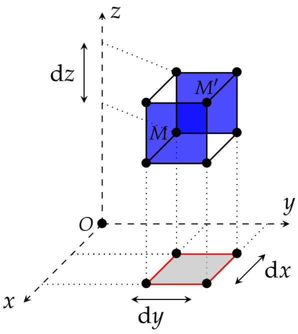

FIGURE 8 – Déplacements élémentaires.

$\overrightarrow{d\ell} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + dz\overrightarrow{u_z}$

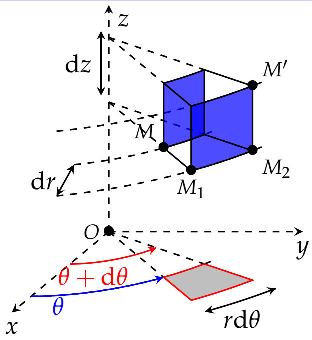

FIGURE 9 – Déplacements élémentaires.

$\overrightarrow{d\ell} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\sin(\theta)\,d\varphi\overrightarrow{u_\varphi}$

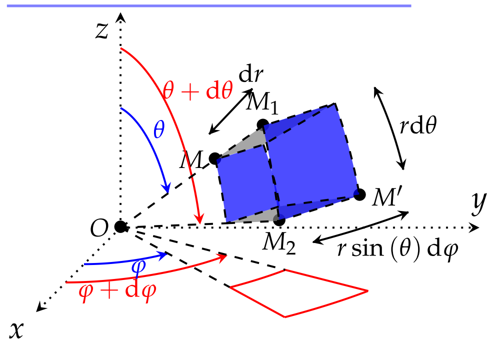

FIGURE 10 – Déplacements élémentaires.

Capacité exigible : Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane. Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle.

Réponse : $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_n} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{\tau} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{n}$ où :

- $\overrightarrow{\tau}$ est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire tel que $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{\tau}$ et $\overrightarrow{n}$ est le vecteur normal dirigé vers le centre de la trajectoire ;
- $\overrightarrow{a_t}$ est l'accélération tangentielle liée à l'évolution de la norme de la vitesse ; $\overrightarrow{a_n}$ est l'accélération normale lié au changement de direction du vecteur vitesse ;
- R est le rayon local de la trajectoire.

On retrouve alors qu'un mouvement uniforme ne présente pas d'accélération tangentielle.