Programme de colle 9

S. Benlhajlahsen → PCSI$_1$

Semaine du lundi 25 Novembre 2024

Sommaire

I Circuit linéaire du second ordre **1**

II Régime sinusoïdal forcé **3**

Au programme cette semaine :

I Circuit linéaire du second ordre

- Circuit (R,L,C) série
  On considère le montage de la figure 1. On ferme l'interrupteur à $t = 0$ et on suppose que le condensateur est initialement déchargé.

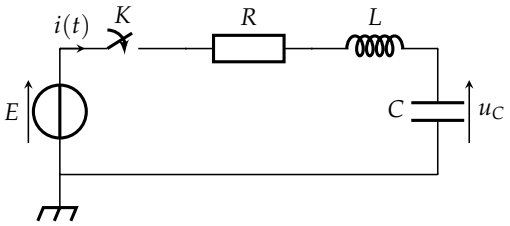

FIGURE 1 – Circuit (R,L,C) pour la charge du condensateur.

Capacité exigible : Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.

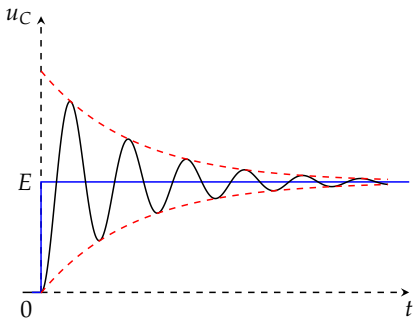

FIGURE 2 – Régime pseusopériodique d'une charge de condensateur.

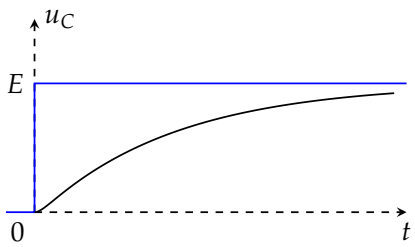

FIGURE 3 – Régime apériodique d'une charge de condensateur.

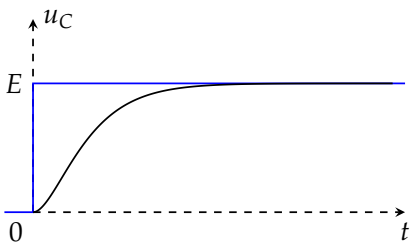

FIGURE 4 – Régime critique d'une charge de condensateur.

Capacité exigible : Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.

Réponse :

— Un bilan de puissance pour la charge donne :

$$\forall t > 0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2\right] = E\,i - R\,i^2$$

L'énergie électromagnétique dans le circuit sera tendanciellement augmentée par le générateur et sera diminuée par la résistance.

— Un bilan de puissance pour la décharge donne :

$$\forall t > 0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2\right] = -R\,i^2 \leqslant 0$$

Autrement dit, la résistance va produire une diminution irrémédiable de des énergies électromagnétiques stockées dans le condensateur et la bobine.

Capacité exigible : Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.

Réponse : Dans le cas d'un régime transitoire d'ordre deux, l'équation différentielle peut se mettre sous la forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u(t) = \text{second membre} \qquad \text{(cours de physique)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\xi\omega_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u(t) = \text{second membre} \qquad \text{(cours de SII)}$$

où :

— Q le facteur de qualité (facteur sans dimension) ;

— ω_0 est la pulsation propre : c'est la pulsation obtenue lorsqu'il n'y a pas d'amortissement[a] ;

— $\xi = \frac{1}{2Q}$ le facteur d'amortissement.

a. C'est donc la pulsation de l'oscillateur harmonique associé.

Capacité exigible : Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité.

Réponse : On distinguera :

— le régime pseudo-périodique obtenu pour $Q > \frac{1}{2}$: c'est un régime de faible amortissement où le « retour à l'équilibre » se fait *via* une oscillation amortie ;

— le régime apériodique obtenu pour $Q < \frac{1}{2}$: c'est un régime d'amortissement élévé ;

— le régime critique qui est la situation où $Q = \frac{1}{2}$

Capacité exigible : Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique.

Capacité exigible : Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité.

Réponse : Le temps caractéristique du régime transitoire est $\tau = \dfrac{1}{\xi\omega_0} = \dfrac{2Q}{\omega_0}$. En effet, ces différents régimes s'atténue comme $\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \exp\left(-\frac{\omega_0\,t}{2Q}\right)$.

II Régime sinusoïdal forcé

Introduction : On étudie la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale.

1. Complexes en physique
   (a) définitions
   (b) rappel sur l'arctangente
   (c) exemples
2. Signal alternatif sinusoïdal

On retiendra Un signal temporel $s(t)$ de période T est alternatif si sa valeur moyenne sur une période est nulle :

$$\langle s \rangle = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T s(t)\mathrm{d}t = 0$$

Remarque Un signal sinusoïdal de la forme $s(t) = s_m \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$ est alternatif car sa valeur moyenne est nulle.

On retiendra Un signal temporel $s(t)$ de période T a une valeur efficace s_{eff} définie par :

$$s_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T s^2(t)\mathrm{d}t}$$

Dans le cas d'un signal sinusoïdal $s(t) = s_m \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$ alors $s_{\text{eff}} = \frac{s_m}{\sqrt{2}}$.

   (a) définition
   (b) intérêt du signal alternatif sinusoïdal
3. Passage du régime transitoire au régime sinusoïdal forcé (R.S.F.)
   (a) circuit (R,C) alimenté par une source de tension sinusoïdale
   (b) cas du circuit (R,L,C) série alimenté par une source de tension sinusoïdale
4. Représentation complexe des grandeurs sinusoïdales
   (a) notation complexe des grandeurs sinusoïdales

À Retenir Si on considère un signal sinusoïdal :

$$s = s_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Le signal complexe associé sera :

$$\underline{s} = s_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{S} \cdot e^{j\omega t}$$

$\underline{S} = s_m \cdot e^{j\varphi}$ est l'amplitude complexe. Bien entendu, $s = \mathrm{Re}\,(\underline{s})$.

   (b) intérêt de la notation complexe

À retenir C'est un résultat assez important qui correspond au passage de l'espace temporel vers l'espace des fréquences ou des pulsations.

opération temporelle sur $\underline{s}$	équivalent fréquentiel
$\frac{\mathrm{d}\underline{s}}{\mathrm{d}t}$	$j\omega \cdot \underline{s}$
$\frac{\mathrm{d}^2\underline{s}}{\mathrm{d}t^2}$	$(j\omega)^2 \cdot \underline{s} = -\omega^2 \cdot \underline{s}$
$\int \underline{s}\mathrm{d}t$	$\frac{\underline{s}}{j\omega}$

   (c) diagramme de Fresnel

(d) déphasage entre u et i

Soit $\mathcal{D}$ un dipôle **linéaire** soumis à une tension $u = u_m \cos(\omega t + \varphi_u)$. Comme il est linéaire, son intensité peut se mettre sous la forme $i = i_m \cos(\omega t + \varphi_i)$.

♡♡♡ On note $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ le déphasage entre u et i, alors :

- si $\varphi > 0$, u est en avance de phase sur i ;
- si $\varphi < 0$, u est en retard de phase sur i ;
- si $\varphi \equiv 0\,[2\pi]$, u et i sont en phase ;
- si $\varphi \equiv \pi\,[2\pi]$, u et i sont en opposition de phase ;
- si $\varphi \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$, u et i sont en quadrature de phase.

On se reportera aux figures 5, 6 et 7 pour quelques exemples.

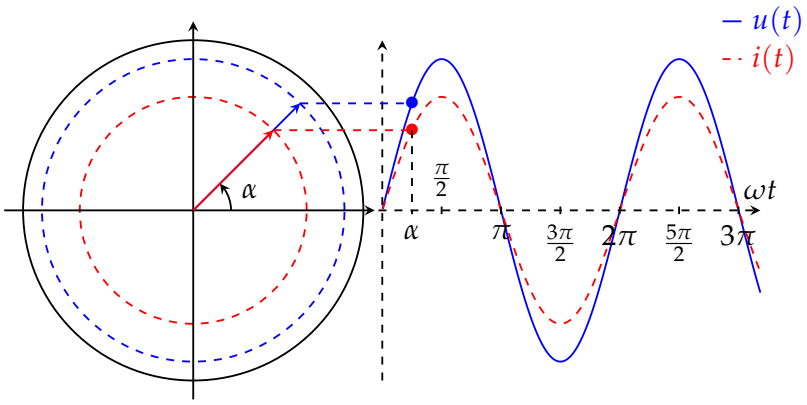

FIGURE 5 – Intensité et tension en phase. On a pris $u(t) = u_m \sin(\omega t)$ et $i(t) = i_m \sin(\omega t)$. Les amplitudes des signaux sont alors obtenues à partir de la partie imaginaire des signaux complexes.

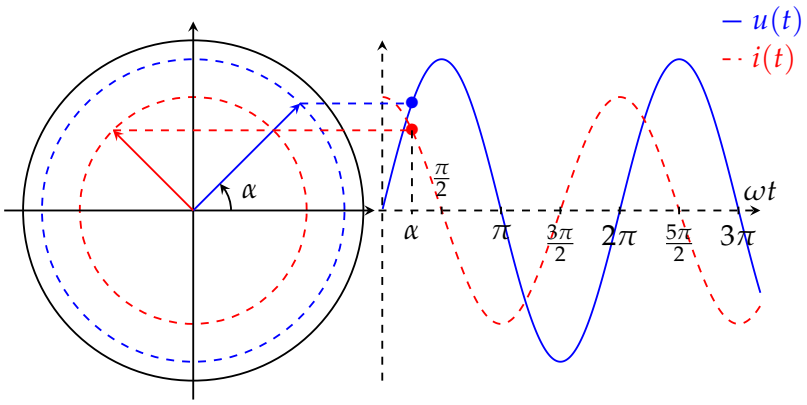

FIGURE 6 – Intensité en quadrature avance sur la tension. On a pris $u(t) = u_m \sin(\omega t)$ et $i(t) = i_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$. Les amplitudes des signaux sont alors obtenues à partir de la partie imaginaire des signaux complexes.

5. Dipôles linéaires
   (a) impédance et admittance complexe d'un dipôle passif
   (b) cas des dipôles R, L et C

   Capacité exigible : impédances complexes Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.

   (c) association de dipôles passifs
      i. association série
      ii. association parallèle

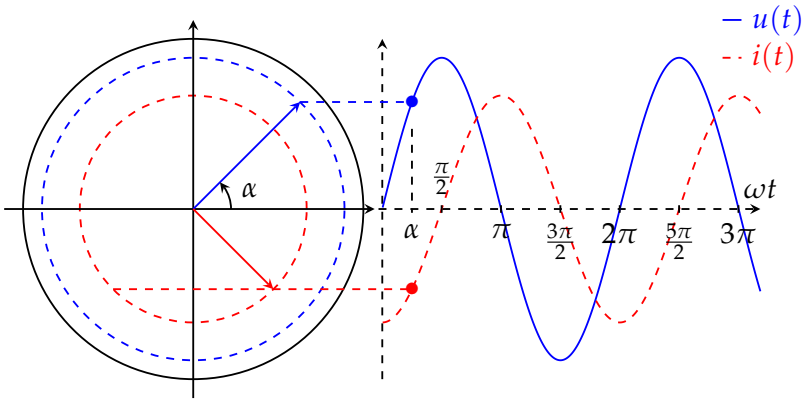

FIGURE 7 – Intensité en quadrature retard sur la tension. On a pris $u(t) = u_m \sin(\omega t)$ et $i(t) = i_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$. Les amplitudes des signaux sont alors obtenues à partir de la partie imaginaire des signaux complexes.

Capacité exigible : association de deux impédances Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.