Devoir maison 1 pour le vendredi 4 octobre 2024

S. Benlhajlahsen

Conseils de rédaction Il est nécessaire de rédiger vos copies (en bon français en limitant les fautes d'orthographe et en évitant les abréviations). Celles-ci devront être claires et lisibles. Les copies mal rédigées **ne seront pas** corrigées.
Enfin, tout résultat non encadré **ne sera pas** pris en compte.

I Analyse d'un mirage (d'après ENS PC 2011)

On cherche à expliquer le phénomène de mirage qui se produit au-dessus d'une route goudronnée fortement chauffée par le soleil. On traitera la propagation de la lumière dans le cadre de l'optique géométrique. On modélise l'air par un milieu dont l'indice optique $n(y)$ dépend de l'altitude y au-dessus du sol (qui correspond au plan $y = 0$), comme schématisé sur le figure 1. On suppose que $n(y) = n_0$ pour $y \geqslant \ell$, et que n varie de manière monotone et continue de n_s pour $y = 0$ à n_0 pour $y = \ell$. L'oeil d'un observateur est placé au point M à la hauteur h au-dessus de la couche d'indice variable, i.e. en $(x_M, y_M) = (0, \ell + h)$.
On considère un rayon de trajectoire $y(x)$, arrivant en M avec un angle θ par rapport à la verticale.

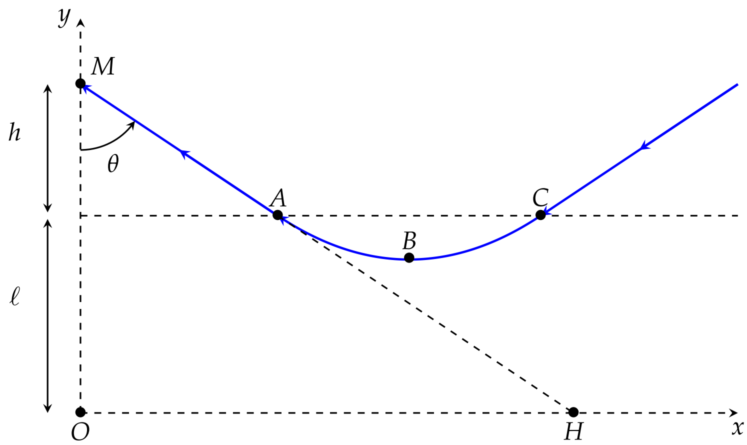

FIGURE 1 – Trajectoire d'un rayon lumineux dans un mirage. Le rayon va sur le dessin de la droite vers la gauche.

Dans la suite on paramétrisera le rayon qui arrive en M par θ, ou de manière équivalente par la pente $\beta = -\left[\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=0} = \mathrm{cotan}(\theta)$.

Question 1 : Quelle est la trajectoire du rayon dans la zone $y \geqslant \ell$? En déduire les coordonnées (x_A, y_A) du point A où le rayon émerge de la couche d'indice variable, en fonction de h, β et ℓ ?

Question 2 : On note $i(y)$ l'angle (positif) que fait le rayon avec la verticale à l'altitude de y. En utilisant la loi de Descartes, établir une relation $n(y)$, $i(y)$, n_0, et le paramètre θ du rayon.

Question 3 : D'après le schéma de la figure 1, quel est le sens de variation de $n(y)$ sur l'intervalle $[0, \ell]$? En assimilant l'air à un mélange idéal de gaz parfaits et en négligeant les variations de pression entre $y = 0$ et $y = \ell$, comparer les températures T_s (au niveau du sol) et T_0 (en $y = \ell$). On pourra s'appuyer sur la loi empirique de Gladstone qui stipule que indice optique et masse volumique ρ sont reliés par : $n - 1 \propto \rho$. Commenter le signe de $T_s - T_0$.

Question 4 : Que vaut l'indice $n_m = n(y_B)$ au point B de rebroussement du rayon ? Exprimer les paramètres θ_ℓ et β_ℓ du rayon limite tel que $y_B = 0$, en fonction de n_0 et n_s. Montrer que $\beta_\ell = \dfrac{\sqrt{n_0^2 - n_s^2}}{n_s}$.

Question 5 : Faire un schéma de la trajectoire d'un rayon avec $\theta < \theta_\ell$ (ou de manière équivalente $\beta > \beta_\ell$).

Question 6 : Le cerveau de l'observateur interprète le rayon reçu en supposant le milieu homogène, et perçoit donc l'image du ciel comme si elle était sur le sol au point H de figure 1. Quelle est, en fonction de ℓ, n_s, h et n_0, la distance minimale OH à laquelle un mirage peut être observé ?

Question 7 : Faire l'application numérique pour un observateur mesurant 1,70 m, en supposant un écart de température $|T_0 - T_s|$ de 10°C, qui induit les valeurs des indices suivantes : $n_s = 1{,}000263$ et $n_0 = 1{,}000272$.
Commenter le caractère relativement exceptionnel des conditions nécessaires à l'observation d'un mirage.

Question 8 : Ré-écrire la relation de la question 2 en éliminant $i(y)$ au profit de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ et la mettre sous la forme :

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \left(\frac{n(y)}{n_0 \sin\theta}\right)^2 - 1$$

On suppose dans la suite de cette partie que $n^2(y)$ est une fonction affine de l'altitude dans la couche $0 \leqslant y \leqslant \ell$, soit $n^2(y) = n_s^2 + ay$ avec $a = \dfrac{n_0^2 - n_s^2}{\ell}$.
Pour simplifier la suite des calculs, on remplacera ici n_m par 1. Cette approximation vous semble-t-elle légitime ?

Question 9 : En déduire l'expression de $y(x)$ pour $x \in [x_A, x_C]$ en fonction de x, a, h, ℓ et β.