Devoir maison 1 pour le vendredi 4 octobre 2024

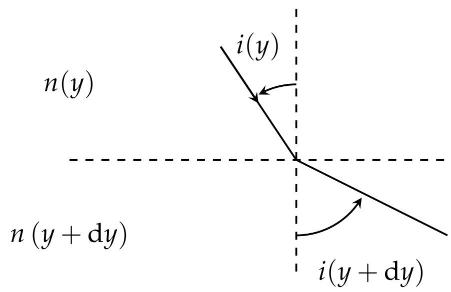
S. Benlhajlahsen

Conseils de rédaction Il est nécessaire de rédiger vos copies (en bon français en limitant les fautes d'orthographe et en évitant les abréviations). Celles-ci devront être claires et lisibles. Les copies mal rédigées **ne seront pas** corrigées.
Enfin, tout résultat non encadré **ne sera pas** pris en compte.

I Analyse d'un mirage (ENS 2011)

Question 1 : Dans la zone $y \geqslant \ell$, l'indice est uniforme et vaut n_0. Dans ce cas, le rayon a une trajectoire rectiligne. Le point A est de coordonnées $x_A = h\tan(\theta) = \dfrac{h}{\text{cotan}(\theta)} = \dfrac{h}{\beta}$ et $y_A = \ell$.

Question 2 : Si on découpe l'air en strates horizontales infiniment minces, il apparaît une réfraction comme sur le dessin ci-dessous :



La relation de Snell-Descartes s'écrit alors : $n(y)\sin(i(y)) = n(y+\mathrm{d}y)\sin(i(y+\mathrm{d}y))$. puis :

$$n(y)\sin(i(y)) = \text{cte} = n_0\sin(\theta)$$

Question 3 : Lorsqu'on va de B de C, $i(y)$ diminue donc $n(y)$ augmente. Or, si on assimile l'air à un gaz parfait alors :

$$n - 1 \propto \rho \propto \frac{1}{T}$$

Ainsi, T est une fonction décroissante de y. Cela conduit à $T_s > T_0$. En effet, la route goudronnée absorbe le rayonnement solaire et est donc très chaude. Une partie de cette chaleur est diffusée vers l'air dont la température décroit avec l'altitude.

Question 4 : Le point B correspond $i \to \dfrac{\pi}{2}$ soit $n_m = n(y_B)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = n_0\sin(\theta)$. De plus, si $y_B = 0$, alors $n_m = n_s = n_0\sin(\theta_\ell)$.
Comme $\theta_\ell \in [0;\pi/2]$ alors $\theta_\ell = \arcsin\left(\frac{n_s}{n_0}\right)$. D'autre part, $\beta_\ell = \text{cotan}(\theta_\ell) = \dfrac{\sqrt{n_0^2 - n_s^2}}{n_s}$.

Question 5 : On pourra se reporter à la figure 1.

Question 6 : La distance OH vaut $\text{OH} = \dfrac{h+\ell}{\beta}$ puis

$$\min(OH) = \frac{\ell + h}{\max(\beta)} = (h+\ell)\cdot\frac{n_s}{\sqrt{n_0^2 - n_s^2}}$$

Question 7 : **Application numérique :** $\min(OH) \approx 400$ m et $\theta_\ell \approx 1{,}57$ rad $\approx 89{,}7$.
Ces conditions sont assez exceptionnelles car il faut une route goudronnée parfaitement plate de plus de 400 mètres de longueur et sans obstacle à l'horizon avec un soleil assez bas pour que les rayons soient quasiment parallèles au sol.

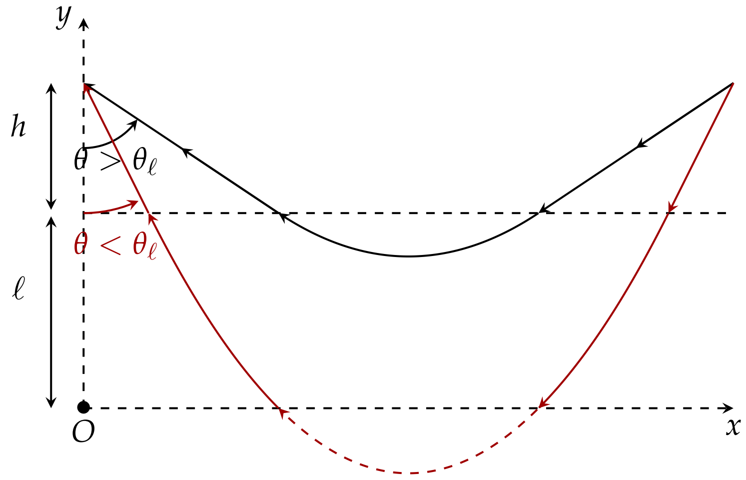


FIGURE 1

Question 8 : Si on reprend l'invariant de propagation introduit par la relation de Descartes alors :

$$n_0 \sin(\theta) = n(y)\sin(i(y)) = n^2(y)\sin^2(i(y)) = n^2(y)\cdot\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$$

Soit encore :

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \left(\frac{n(y)}{n_0\sin\theta}\right)^2 - 1$$

Question 9 : On se place en $x \in [x_A, x_B]$, on constate $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} < 0$ ce qui donne

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\sqrt{\left(\frac{n(y)}{n_0\sin\theta}\right)^2 - 1} = -\sqrt{\frac{n_s^2+ay}{(n_0\sin(\theta))^2} - 1} = -\sqrt{\frac{n_s^2+ay}{n_m^2} - 1}$$

On sépare les variables :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\frac{n_s^2+ay}{n_m^2} - 1}} = -\int \mathrm{d}x$$

Soit, par intégration :

$$\frac{2n_m}{a}\cdot\sqrt{\frac{n_s^2+ay}{n_m^2} - 1} = -x + \text{cte}$$

La constante peut être déterminée par les coordonnées du point $A\left(\frac{h}{\beta}, \ell\right)$. Cela donne :

$$\frac{2n_m}{a}\cdot\sqrt{\frac{n_s^2+a\ell}{n_m^2} - 1} = -\frac{h}{\beta} + \text{cte}$$

En comparant ces deux dernières écritures, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\frac{2n_m}{a}\cdot\left[\sqrt{\frac{n_s^2+ay}{n_m^2}-1}-\sqrt{\frac{n_s^2+a\ell}{n_m^2}-1}\right] &= \frac{h}{\beta}-x \\
\sqrt{n_s^2+ay-n_m^2}-\sqrt{n_s^2+a\ell-n_m^2} &= \frac{a}{2}\left(\frac{h}{\beta}-x\right) \\
\sqrt{n_s^2+ay-n_m^2}-\sqrt{n_0^2-n_m^2} &= \frac{a}{2}\left(\frac{h}{\beta}-x\right) \\
\sqrt{n_s^2+ay-n_m^2} &= \sqrt{n_0^2-n_m^2}+\frac{n_0^2-n_s^2}{2\ell}\left(\frac{h}{\beta}-x\right) \\
n_s^2+ay-n_m^2 &= \left(\sqrt{n_0^2-n_m^2}+\frac{n_0^2-n_s^2}{2\ell}\left(\frac{h}{\beta}-x\right)\right)^2 \\
y &= \frac{n_m^2-n_s^2}{a}+\left(\sqrt{n_0^2-n_m^2}+\frac{n_0^2-n_s^2}{2\ell}\left(\frac{h}{\beta}-x\right)\right)^2
\end{aligned}
$$

On obtient finalement :

$$
y=\ell\cdot\frac{n_m^2-n_s^2}{n_0^2-n_s^2}+\left(\sqrt{n_0^2-n_m^2}+\frac{n_0^2-n_s^2}{2\ell}\cdot\left(\frac{h}{\beta}-x\right)\right)^2
$$