Devoir maison 2 pour le mercredi 20 Novembre 2024

S. Benlhajlahsen

I Analyse d'un mouvement "stick-slip".

Le frottement solide joue un rôle considérable dans de nombreuses situations, statiques ou dynamiques. Nous allons analyser ici quelques aspects du mouvement d'un solide qui peut soit glisser ("slip") soit adhérer ou coller ("stick") sur son support. Ce phénomène a pour origine le fait que les coefficients de frottement statique f_s et dynamique f_d sont différents. Il est ainsi responsable du grincement des portes, du crissement des craies sur le tableau noir, ou dans un registre plus harmonieux, de la mise en vibration d'une corde de violon. Les donnés numériques sont rassemblées dans la table 1.

Rappels sur les lois de Coulomb : $\overrightarrow{R_T}$ et $\overrightarrow{R_N}$ (voir figure 1) sont respectivement les composantes tangentielle et normale de l'action de contact exercée par un solide sur un autre, f_s et f_d les coefficients de frottement "statique" et "dynamique" avec $f_s > f_d$.

- En phase de collage, la vitesse de glissement est nulle ($\overrightarrow{v_g} = \overrightarrow{0}$) et $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| < f_s \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$.
- En phase de glissement, la vitesse de glissement est non nulle ($\overrightarrow{v_g} \neq \overrightarrow{0}$), et $\overrightarrow{R_T}$ est de sens opposé à cette vitesse de glissement avec $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = f_d \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$;
- En phase de collage, le mouvement s'amorcera lorsque $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = f_s \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$. Une fois le mouvement amorcé, on retrouve $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = f_d \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$.

FIGURE 1

I.A glissement sur plan incliné

On considère un point matériel M de masse m posé sans vitesse initiale sur un plan incliné (voir figure 2). On note α l'incliné de ce plan par rapport à l'horizontale. Cet angle α est modifiable entre $0°$ et $90°$.

Question 1 : Pour une valeur de α quelconque, écrire la loi de la quantité de mouvement dans le référentiel du sol galiléen.

Question 2 : Si on part de $\alpha = 0$ et qu'on augmente progressivement α, déterminer la valeur α_1 à partir de laquelle le glissement s'amorce. Montrer que :

$$\alpha_1 = \arctan\left(f_s\right)$$

Donner la valeur numérique de α_1.

Question 3 : La masse glisse sur le plan incliné de $\alpha > \alpha_1$. On diminue progressivement α. Déterminer la valeur α_2 à

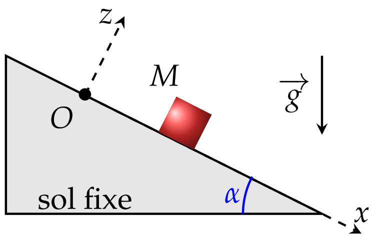

FIGURE 2

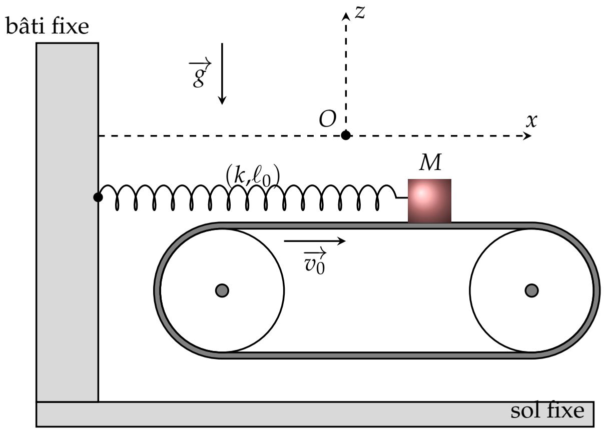

FIGURE 3

partir de laquelle le glissement s'arrête. Montrer que :

$$\alpha_2 = \arctan(f_d)$$

Donner la valeur numérique de α_2.

Question 4 : On constate alors qu'entre la phase d'augmentation et la phase de diminution de α, les angles qui assurent la transition entre collage et glissage ne sont pas les mêmes. Connaissez-vous des phénomènes similaires et le nom que l'on donne généralement à cela ?

I.B mouvement sur un tapis roulant

On considère le mouvement d'une masse m posée sur un tapis roulant (voir figure 3). Le tapis roulant se déplace à une vitesse horizontale $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$ avec $v_0 > 0$, par rapport au référentiel du sol galiléen. La vitesse de glissement s'écrit alors

$$\overrightarrow{v_g} = \dot{x}\overrightarrow{u_x} - v_0\overrightarrow{u_x}$$

La masse est soumise à une force de rappel élastique colinéaire au mouvement du tapis roulant et exercée par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. On repérera la position de la masse par son abscisse x dans le référentiel du sol, l'origine O correspondant à l'absence de déformation du ressort (c'est-à-dire l'équilibre).

Question 5 : On considère le cas où la masse est fixe **dans le référentiel du sol**. Est-on dans un cas de glissement ou de non-glisement ? Quelle est alors l'expression de $\overrightarrow{v_g}$? Montrer que cette situation correspond à une position :

$$x_{\text{éq}} = \frac{f_d\, g}{\omega^2} \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Question 6 : Donner les valeurs numériques $x_{\text{éq}}$, ω et $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

On pose dans toute la suite $X = x - x_{\text{éq}}$.

Question 7 : Dans le cas où $\dot{X} > v_0$, montrer que l'équation du mouvement s'écrit :

$$m\ddot{X} = -k\,X - 2f_d\,m\,g$$

Question 8 : Dans le cas où $\dot{X} < v_0$, montrer que l'équation du mouvement s'écrit :

$$m\ddot{X} = -k\,X$$

Question 9 : Montrer qu'une phase de mouvement avec collage, pour laquelle $\dot{X} = v_0$, suppose que X appartient à l'intervalle $[X_1, X_2]$ avec $X_1 = -(f_s + f_d)\cdot\frac{g}{\omega^2}$ et $X_2 = (f_s - f_d)\cdot\frac{g}{\omega^2}$. À quelle condition peut-elle se maintenir ?

Question 10 : La masse est posée sur le tapis sans vitesse initiale à l'abscisse X_0, avec $X_0 > 0$. Analyser ce qu'il se passe pour le début du mouvement puis montrer que, pour le début du mouvement, $X(t) = X_0 \cos(\omega \cdot t)$. Montrer que ce type de mouvement se maintient si X_0 est inférieur à une valeur $X_m = \frac{v_0}{\omega}$.

Question 11 : Déterminer numériquement :

- X_1 puis $x_1 = x_{\text{éq}} + X_1$;
- X_2 puis $x_2 = x_{\text{éq}} + X_2$;
- X_m.

Question 12 : On donne en figures 4 et 5 les courbes donnant x au cours du temps ainsi que la trajectoire dans le plan $(x,\dot{x})$. Décrire et justifier le mouvement de la masse dans les phases :

- $A \to B$;
- $B \to C$;
- $C \to D$;
- $D \to E$.

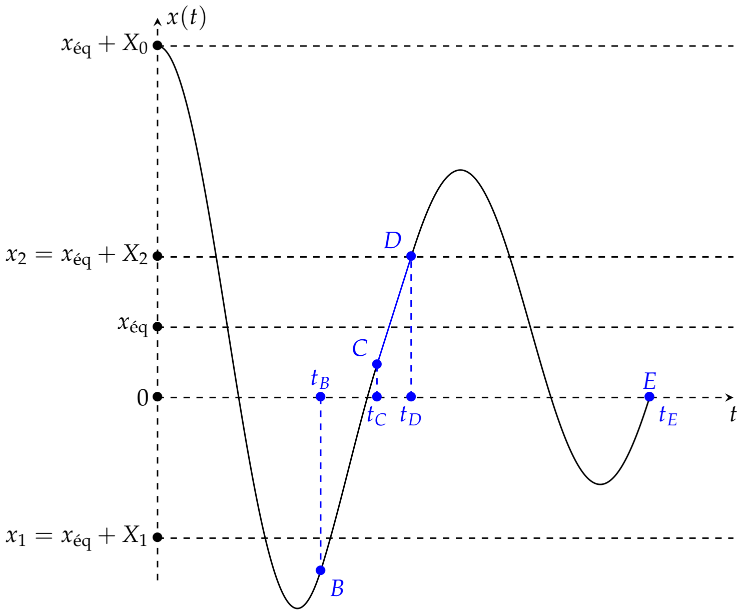

FIGURE 4 – x en fonction du temps. On notera que la partie CD est un segment (et non pas une portion de sinusoïde).

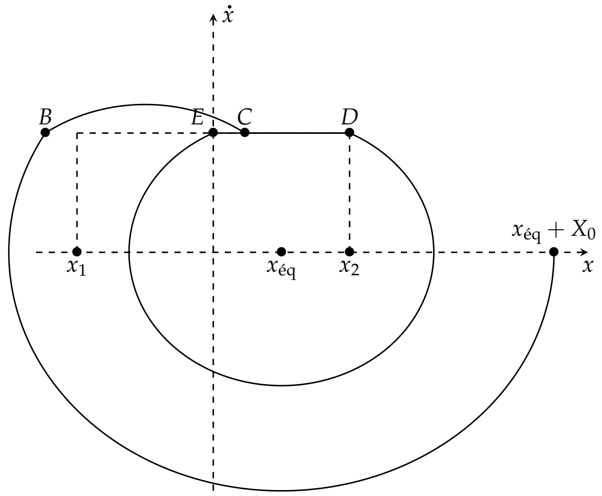

FIGURE 5

Question 13 : En quoi l'étude précédente permettrait-elle de décrire le crissement d'une craie sur un tableau ? Pourquoi, en coupant la craie en deux, le bruit désagréable cesse ?

Question 14 : Dans une voiture, le freinage est assuré par le frottement entre une plaquette et le disque en rotation (voir figure 6). Quelles sont les conséquences du "stick-slip" sur le freinage ? Est-il recherché ou cherche-t-on à l'éviter ?

FIGURE 6 – Plaquettes de frein et disque

coeff. frottement statique	$f_s = 0{,}4$
coeff. frottement dynamique	$f_d = 0{,}2$
champ de pesanteur	$g \approx 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
vitesse du tapis	$v_0 \approx 0{,}63\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
constante de raideur	$k \approx 19{,}7\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$
masse	$m \approx 0{,}5\ \mathrm{kg}$
position initiale	$x_0 \approx 25\ \mathrm{cm}$

TABLE 1 – Données numériques