Devoir maison 2 pour le mercredi 20 Novembre 2024

S. Benlhajlahsen

I Analyse d'un mouvement "stick-slip".

I.A glissement sur plan incliné

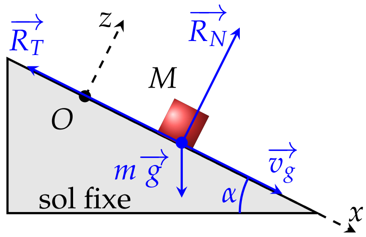

FIGURE 1

Question 1 : On pourra se reporter à la figure 1. On se place dans le référentiel du sol où le plan est fixe. Dans ce cas, la vitesse de glissement vaut $\overrightarrow{v_g} = \dot{x}\overrightarrow{u_x}$. Le bilan des force est alors :

- le poids $m\,\overrightarrow{g} = mg\,\left[\sin(\alpha)\,\overrightarrow{u_x} - \cos(\alpha)\,\overrightarrow{u_z}\right]$;
- $\overrightarrow{R_N} = +\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|\,\overrightarrow{u_z}$;
- $\overrightarrow{R_T} = -\left\|\overrightarrow{R_T}\right\|\,\overrightarrow{u_x}$.

La loi de la quantité de mouvement appliquée au point M nous donne :

$$m\,\overrightarrow{a} = m\,\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}$$

La projection de cette équation sur la base $\left(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_z}\right)$ donne :

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= mg\,\sin(\alpha) - \left\|\overrightarrow{R_T}\right\| \\ 0 &= -mg\,\cos(\alpha) + \left\|\overrightarrow{R_N}\right\| \end{cases}$$

Question 2 : On part de $\alpha = 0$, la masse est posée sans vitesse initiale et ne se déplace pas (cas de non glissement). En augmentant α, le mouvement s'amorcera lorsque $\ddot{x} > 0$ (avec $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = f_s\,\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$) puis :

$$mg\sin(\alpha) > \left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = f_s\,\left\|\overrightarrow{R_N}\right\| = f_s\,mg\cos(\alpha)$$

Soit encore :

$$\tan(\alpha) > f_s$$

Finalement,

$$\alpha_1 = \arctan(f_s) \approx 0{,}38\ \text{rad} \approx 22^\circ$$

Question 3 : En phase de glissement, l'équation du mouvement devient :

$$m\ddot{x} = mg\,\sin(\alpha) - f_d mg\,\cos\alpha$$

Partant d'une vitesse $\dot{x} > 0$, M s'arrêtera si M ralentit, c'est-à-dire $\ddot{x} < 0$ puis :

$$mg\,\sin(\alpha) - f_d mg\,\cos\alpha < 0$$

Soit encore :

$$\tan(\alpha) < f_d$$

Finalement,

$$\alpha_1 = \arctan(f_d) \approx 0{,}20 \text{ rad} \approx 11{,}3°$$

Question 4 : On constate que l'angle de changement d'état dépend du sens croissant ou décroissant de α. C'est un phénomène d'**hystérésis**. Ce phénomène se retrouve dans les disques durs à aimants pour lesquels l'aimantation ne sera pas la même suivant que le champ magnétique est croissant ou décroissant. C'est la base de l'effet "mémoire" de ceux-ci.

I.B mouvement sur un tapis roulant

Question 5 : Dans ce cas, $\overrightarrow{v_g} = -v_0\overrightarrow{u_x}$ et la masse glisse sur le tapis roulant tout en étant fixe dans le référentiel du sol ($\forall t, \dot{x} = 0$). Le bilan des forces s'écrit alors :

- la tension du ressort : $\overrightarrow{T} = -k\,x\overrightarrow{u_x}$;
- le poids : $m\,\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u_z}$;
- la réaction normale $\overrightarrow{R_N} = \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|\overrightarrow{u_z}$;
- la réaction tangentielle $\overrightarrow{R_T} = \left\|\overrightarrow{R_T}\right\|\overrightarrow{u_x}$.

La loi de la quantité de mouvement donne alors :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & -k\,x + \left\|\overrightarrow{R_T}\right\| \\ 0 & = & -mg + \left\|\overrightarrow{R_N}\right\| \end{array}\right.$$

Puis

$$x = x_{\text{éq}} = \frac{\left\|\overrightarrow{R_T}\right\|}{k} = \frac{f_d\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|}{k} = \frac{f_d\,mg}{k}$$

Finalement :

$$x_{\text{éq}} = \frac{f_d\,g}{\omega^2} \text{ avec } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Question 6 : On trouve $x_{\text{éq}} \approx 5{,}1$ cm, $\omega \approx 6{,}3\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 1$ Hz.

Question 7 : Dans le cas où $\dot{X} > v_0$, alors $\overrightarrow{R_T}$ est selon $-\overrightarrow{u_x}$. La loi de la quantité de mouvement se réécrit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} m\ddot{X} & = & -k\,x - \left\|\overrightarrow{R_T}\right\| \\ 0 & = & -mg + \left\|\overrightarrow{R_N}\right\| \end{array}\right.$$

Comme on est en phase de glissement alors $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = f_d\left\|\overrightarrow{R_N}\right\| = f_d\,mg$ puis :

$$m\ddot{X} = -k\,x - f_d\,mg = -k\,\left(X + x_{\text{éq}}\right) - f_d\,mg = -k\,X - 2f_d\,m\,g$$

Question 8 : Dans le cas où $\dot{X} < v_0$, alors $\overrightarrow{R_T}$ est selon $+\overrightarrow{u_x}$. La loi de la quantité de mouvement se réécrit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} m\ddot{X} & = & -k\,x + \left\|\overrightarrow{R_T}\right\| \\ 0 & = & -mg + \left\|\overrightarrow{R_N}\right\| \end{array}\right.$$

Comme on est en phase de glissement alors $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = f_d\left\|\overrightarrow{R_N}\right\| = f_d\,mg$ puis :

$$m\ddot{X} = -k\,x + f_d\,mg = -k\,\left(X + x_{\text{éq}}\right) + f_d\,mg = -k\,X$$

Question 9 : Dans le cas d'une phase de collage, $v_g = 0$ donc $\dot{x} = \dot{X} = v_0$ puis $\ddot{X} = 0$. On a toujours $\left\|\overrightarrow{R_N}\right\| = mg$ mais on a, à présent, $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| \leqslant f_s \left\|\overrightarrow{R_N}\right\| = f_s mg$. Ainsi :

$$0 = -k\,x + \overrightarrow{R_T}\cdot\overrightarrow{u_x} = -kX - kx_{\text{éq}} + \overrightarrow{R_T}\cdot\overrightarrow{u_x}$$

Soit encore :

$$\begin{array}{rcl} -f_s mg & \leqslant \overrightarrow{R_T}\cdot\overrightarrow{u_x} \leqslant & f_s mg \\ -f_s mg & \leqslant kX + kx_{\text{éq}} \leqslant & f_s mg \\ -f_s mg - kx_{\text{éq}} & \leqslant kX \leqslant & f_s mg - kx_{\text{éq}} \\ -\left(f_s + f_d\right) mg & \leqslant kX \leqslant & \left(f_s - f_d\right) mg \end{array}$$

Finalement,

$$X_1 \leqslant X \leqslant X_2$$

En posant $X_1 = -\dfrac{f_s + f_d}{\omega^2} g < 0$ et $X_2 = \dfrac{f_s - f_d}{\omega^2} g > 0$. Une phase de collage ne peut donc exister que si $X \in [X_1; X_2]$. Elle ne peut se maintenir que si $v_g = 0$ (ce qui ne peut pas être le cas indéfiniment).

Question 10 : Au départ, la masse est posée sans vitesse initiale donc $\dot{X} = 0 < v_0$. On va donc être dans une phase de glissement telle que $v_g < 0$. On a alors

$$\ddot{X} = -\omega^2 X$$

puis $X(t) = X_0 \cos(\omega t)$ car $X(0) = X_0$ et $\dot{X}(0) = 0$. Cette phase de glissement suppose que $v_g < 0$ soit $-X_0\omega \sin(\omega t) - v_0 < 0$ et ceci pour tout t. Il suffit donc d'avoir $X_0\omega < v_0$ soit

$$X_0 < \frac{v_0}{\omega}$$

Question 11 : On trouve :

- $X_1 \approx -15$ cm puis $x_1 = x_{\text{éq}} + X_1 \approx -10$ cm ;
- $X_2 \approx 5$ cm puis $x_2 = x_{\text{éq}} + X_2 \approx 10$ cm ;
- $X_m \approx 10$ cm.

Question 12 :

- $A \to B$: c'est une phase de glissement pour laquelle $v_g < 0$. La masse va de la droite vers la gauche tant que $v_g \neq 0$;
- $B \to C$: En B, $v_g = 0$ mais $x \notin [x_1; x_2]$. On reprend une phase de glissement de gauche vers la droite cette fois-ci ;
- $C \to D$: c'est une phase de collage pour laquelle $v_g = 0$ et $\dot{x} = v_0$. Cette phase cesse lorsque $x > x_2$;
- $D \to E$: on reprend une phase de glissement et on rentre dans un cycle permanent alternant collage et glissage.

Question 13 : Une craie déplacée sur le tableau va alterner phase de glissement et phase de collage. Si on compare la craie à un pendule, la pulsation ω devient $\sqrt{\frac{g}{\ell}}$. En coupant la craie en deux, ω augmente et sort du domaine audible (on passe dans les ultra-sons).

Question 14 : Le stick-slip va créer des "à-coups" dans le freinage. Au lieu d'avoir une réduction de la vitesse qui soit continue, on aura des phase de freinage ("stick") suivie de phase sans freinage ("slip"). Cela donnera une réduction de vitesse très désagréable pour les passagers du véhicule. C'est un phénomène qui sera à éviter dans la conception des véhicules.

> **Remarque culturelle :** Dans le cas des camions, la grande inertie de ceux-ci obligent d'augmenter la taille des plaquettes. Le freinage par "à-coups" peut alors apparaître. Pour l'éviter, on utilise deux systèmes de freinages en parallèle : les plaquettes et un système de freinage par induction.