Devoir maison 2 pour le jeudi 9 octobre 2025

S. Benlhajlahsen

I Fibre à gradient d'indice

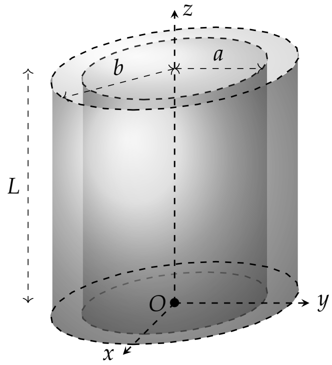

FIGURE 1 – Fibre optique.

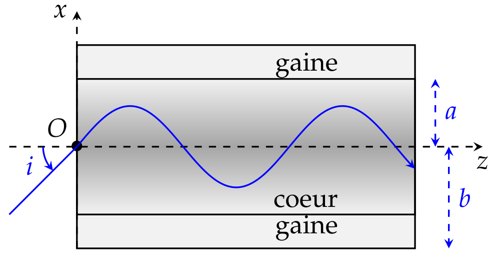

FIGURE 2 – Coupe de la fibre dans le plan (xOz). On a rajouté un rayon lumineux dans le coeur.

On considère une fibre optique de longueur L constituée d'un coeur de rayon a et d'une gaine de rayon b (voir figure 1 et 2). Les fibres à gradient d'indice ont une importance particulière pour la transmission d'informations. L'indice dans le coeur diminue de façon continue de la valeur n_1 sur l'axe de la fibre à la valeur n_2 dans la gaine. On se place dans toute la suite dans le plan (xOz). On suppose que l'indice $n(x)$ vérifie :

$$n(x) = \begin{cases} n_1 \cdot \left(1 - \Delta \cdot \dfrac{x^2}{a^2}\right) & \text{pour} \quad x \in [-a;a] \quad \text{(coeur)} \\ n_2 & \text{pour} \quad |x| > a \quad \text{(gaine)} \end{cases}$$

avec $\Delta = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1} > 0$. On considérera dans toute ce problème que le milieu extérieur à la fibre est de l'air d'indice $n_0 = 1$.

Données numériques : $n_1 = 1{,}456$ et $n_2 = 1{,}410$.

Question 1 : Au vu de la trajectoire du rayon lumineux dans le coeur, voyez-vous une analogie avec un phénomène physique naturel ? Peut-on justifier l'allure de la courbe avec les évolutions de l'indice optique ? On pourra s'appuyer sur la vecteur $\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}\overrightarrow{u_x}$ représentant le gradient d'indice optique.

Pour déterminer l'équation de la trajectoire d'un rayon lumineux, on découpe, par la pensée, la fibre en couche d'épaisseur infinitésimale (voir figure 3). On considère alors qu'entre x et $x + \mathrm{d}x$, le rayon est assimilable à un segment dans une strate d'épaisseur $\mathrm{d}x$ et d'indice uniforme.

Question 2 : On note $\theta(x,z)$ l'angle que fait le rayon lumineux avec $\overrightarrow{u_z}$ au point de coordonnées (x,z). Si on note $\theta_0 = \theta(x = 0, z = 0)$, quelle relation y-a-t-il entre n_0, n_1, i et θ_0.

Question 3 : Justifier, proprement, que :

$$\forall x \in [-a;a]\,,\ n_1 \cdot \left(1 - \Delta \cdot \frac{x^2}{a^2}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}x^2}} = n_1 \cdot \cos(\theta_0)$$

Mettre ensuite cette équation sous la forme $\mathrm{d}z = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A^2 - 1}}$ où A s'exprimera en fonction de Δ, x, a et θ_0.

On considère, dans toute la suite, que la quantité Δ est jugée suffisamment petite pour qu'on soit dans l'approximation $\Delta \ll 1$.

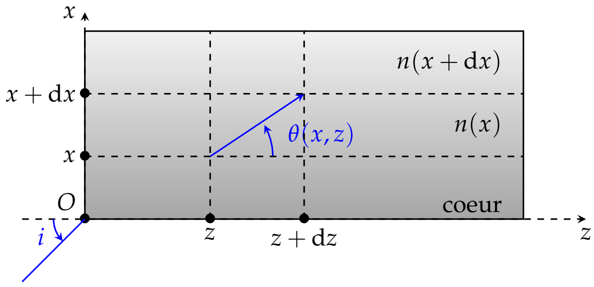

FIGURE 3 – Découpage en strate infinitésimale.

Question 4 : Justifier alors que :

$$\forall x \in [-a; a], \ \tan(\theta_0)\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \dfrac{2\Delta \cdot x^2}{a^2 \sin^2(\theta_0)}}}$$

Question 5 : Justifier alors que la trajectoire dans le coeur a pour équation :

$$\forall x \in [-a; a], \ x = \frac{a \sin(\theta_0)}{\sqrt{2\Delta}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{a \cos(\theta_0)} \cdot z\right)$$

Question 6 : On donne en figures 4 et 5 différentes trajectoires de rayons lumineux. Que constate-t-on ? Proposer quelques justifications.

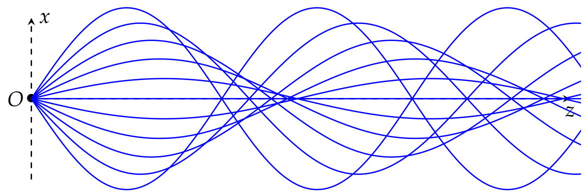

FIGURE 4 – Trajectoires de rayons lumineux pour des valeurs de θ_0 réparties régulièrement entre $-\pi/4$ et $\pi/4$.

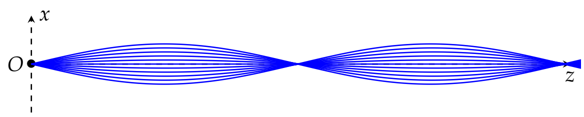

FIGURE 5 – Trajectoires de rayons lumineux pour des valeurs de θ_0 réparties régulièrement entre $-\pi/20$ et $\pi/20$.

Question 7 : Proposer une condition de guidage dans la fibre. Autrement dit, pour quelles valeurs de i, le rayon reste-t-il effectivement dans la fibre ? Donner alors numériquement la valeur limite de i.