Devoir maison 2 pour le jeudi 9 octobre 2025

S. Benlhajlahsen

I Fibre à gradient d'indice

Question 1 : Le coeur est un mileu d'indice continûment variable. De ce fait, la lumière aura une trajectoire courbée. Cela nous fait penser aux mirages optiques où la variation de l'indice optique provient de la variation de la température de l'air.
Dans le cas du mirage, la trajectoire de la lumière est une courbe qui présente sa concavité dans le sens du gradient d'indice :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(n) = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}\overrightarrow{u_x} = -2n_1 \cdot \Delta \cdot \frac{x}{a^2}\overrightarrow{u_x}$$

Ains, sur la figure 1, on voit que le sens du gradient est en accord avec la concavité locale de la trajectoire.

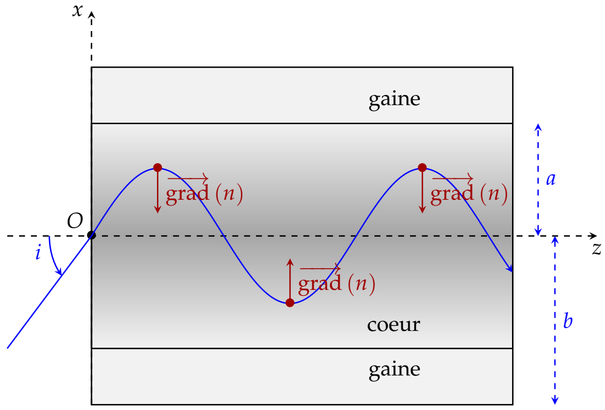

FIGURE 1

Question 2 : La loi de Descartes pour la réfraction au niveau du point O donne :

$$n_0 \cdot \sin(i) = n(0) \cdot \sin(\theta_0) = n_1 \cdot \sin(\theta_0)$$

Question 3 : Justifier, proprement, que : Dans cette situation, le plan $x = cte$ constitue un dioptre et la droite $z = cte$ une normale à ce dioptre. Si on mesure les angles par rapport à la normale, la relation de Descartes pour la réfraction, entre la strate d'indice $n(x)$ et celle d'indice $n(x + \mathrm{d}x)$, s'écrit :

$$n(x)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta(x)\right) = n(x+\mathrm{d}x)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta(x+\mathrm{d}x)\right)$$

Soit encore :

$$n(x)\cos(\theta(x)) = n(x+\mathrm{d}x)\cos(\theta(x+\mathrm{d}x))$$

Cela nous prouve que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[n(x)\cos(\theta(x))\right] = 0$$

Autrement dit :

$$\forall x \in [-a;a]\,,\;\; n(x)\sin(\theta(x)) = cte = n_1 \cdot \sin(\theta_0)$$

En tenant compte des conditions en O. De plus, $\cos\theta(x) = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}z^2}$ d'où :

$$\forall x \in [-a;a]\,,\; n_1 \cdot \left(1 - \Delta \cdot \frac{x^2}{a^2}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}x^2}} = n_1 \cdot \cos(\theta_0)$$

Poursuivons :

$$n_1^2 \cdot \left(1 - \Delta \cdot \frac{x^2}{a^2}\right)^2 \cdot \mathrm{d}z^2 = n_1^2 \cdot \cos^2(\theta_0) \cdot \mathrm{d}x^2 + n_1^2 \cdot \cos^2(\theta_0) \cdot \mathrm{d}z^2$$

$$\left(1 - \Delta \cdot \frac{x^2}{a^2}\right)^2 \cdot \mathrm{d}z^2 - \cos^2(\theta_0) \cdot \mathrm{d}z^2 = \cos^2(\theta_0) \cdot \mathrm{d}x^2$$

Ce qui donne alors : $\mathrm{d}z = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{\left(1-\Delta\cdot\frac{x^2}{a^2}\right)^2}{\cos^2(\theta_0)} - 1}} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A^2-1}}$ avec $A = \dfrac{1}{\cos(\theta_0)} \cdot \left(1 - \Delta \cdot \dfrac{x^2}{a^2}\right)$.

Remarque Avec les valeurs de n_1 et n_2 proposée, on trouve $\Delta \approx 0.03$.

Question 4 : Comme $\Delta \ll 1$, alors

$$A^2 \approx \frac{\left(1 - 2\Delta\frac{x^2}{a^2}\right)}{\cos^2(\theta_0)} = \left(1 + \tan^2(\theta_0)\right) \cdot \left(1 - 2\Delta\frac{x^2}{a^2}\right)$$

puis

$$\begin{aligned} A^2 - 1 &= -2\Delta\frac{x^2}{a^2} + \tan^2(\theta_0) \cdot \left(1 - 2\Delta\frac{x^2}{a^2}\right) \\ &= \tan^2(\theta_0) \cdot \left(1 - 2\Delta\frac{x^2}{a^2} \cdot \left[1 + \frac{1}{\tan^2(\theta_0)}\right]\right) \\ &= \tan^2(\theta_0) \cdot \left(1 - 2\Delta\frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{1 + \tan^2(\theta_0)}{\tan^2(\theta_0)}\right) \\ &= \tan^2(\theta_0) \cdot \left(1 - 2\Delta\frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\sin^2(\theta_0)}\right) \end{aligned}$$

Finalement,

$$\tan(\theta_0)\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - 2\Delta\frac{x^2}{a^2\sin^2(\theta_0)}}}$$

Question 5 : Si on intègre la relation précédente, on obtient :

$$\tan(\theta_0) \cdot z = \frac{a \cdot \sin(\theta_0)}{\sqrt{2\Delta}} \cdot \arcsin\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{a \cdot \sin(\theta_0)} \cdot x\right)$$

Soit encore :

$$\forall x \in [-a; a],\ x = \frac{a\sin(\theta_0)}{\sqrt{2\Delta}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{a\cos(\theta_0)} \cdot z\right)$$

Question 6 : On constate que la trajectoire est une sinusoïde de période $\Lambda = \frac{2\pi \cdot a\cos(\theta_0)}{\sqrt{2\Delta}}$. Cette période spatiale dépend des conditions d'injection θ_0. Si θ_0 est petit, $\Lambda \approx \frac{2\pi \cdot a}{\sqrt{2\Delta}}$ (à l'ordre 1), et les rayons se croisent périodiquement en un même point quelque soit θ_0. Cela est à rapproché des conditions de Gauss. Dans le cas où θ_0 est grand, la période Λ dépend de θ et on voit que la "refocalisation" du faisceau incident n'est pas ponctuel. Cette situation peut engendrer des pertes de débit lors de la transmission de l'information.

Question 7 : Les calculs précédents n'ont de sens que si le rayon reste dans le coeur. Si le rayon arrive dans la gaine, il aura une trajectoire rectiligne et sortira de la fibre. De ce fait, il y a guidage dans le coeur si $\forall z,\ \ |x| \leqslant a$. Cela implique que :

$$\frac{a\sin(\theta_0)}{\sqrt{2\Delta}} \leqslant a$$

Cela donne :

$$\theta_0 \leqslant \arcsin(\sqrt{2\Delta}) \approx 0{,}25 \ \text{ rad} \approx 14{,}6^\circ$$

puis :

$$i \leqslant \arcsin\left(n_1 \cdot \sqrt{2\Delta}\right) \approx 0{,}37 \ \text{ rad} \approx 21{,}5^\circ$$