Devoir maison 1 pour le jeudi 8 octobre 2026

S. Benlhajlahsen

I Courbe du chien

Un promeneur A suit un chemin rectiligne avec une vitesse constante $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$. À l'instant initial, le promeneur se trouve à l'origine du repère O et son chien M se trouve à une distance a sur l'axe (Oy). Partant de $t = 0$, il court vers son maître à la vitesse $v = \|v\|$ constante. Autrement dit, le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ du chien est constamment dirigé vers le point A. On cherche à déterminer la durée de la poursuite, c'est-à-dire la durée que met le chien pour rattraper son maître.
Dans tout l'exercice, on notera x et y les coordonnées de M et $r = \left\|\overrightarrow{AM}\right\|$ la distance à l'instant t entre le promeneur et le chien. Enfin, on notera α l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{v}$ comme sur le dessin de la figure 1.

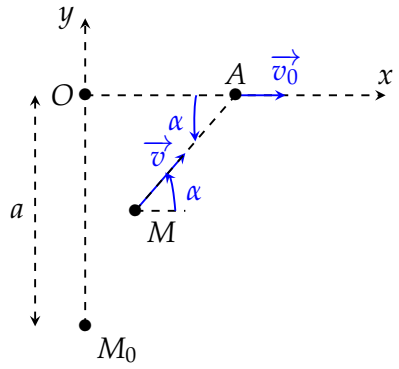


FIGURE 1 – M_0 est la position initiale du chien et M sa position à un instant t quelconque.

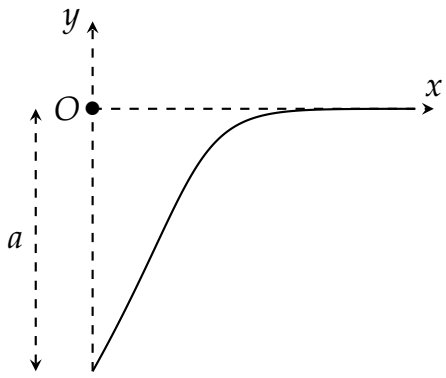


FIGURE 2 – Courbe tracée dans le cas où $\dfrac{v}{v_0} = \dfrac{4}{3{,}8}$

Question 1 : Exprimer $\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ et $\dot{y} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ en fonction de v et α. Pour cela, projeter $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\,(M/\mathcal{R})$ dans la base cartésisenne.

Question 2 : Exprimer, à présent, x et y en fonction de v_0, r, α et t. Pour cela, on pourra remarquer que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$.

Question 3 : En déduire deux équations différentielles en $r(t)$ et $\alpha(t)$ qui peuvent se combiner pour donner le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v_0\cos(\alpha) - v \\ r\dot{\alpha} = r\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -v_0\sin(\alpha) \end{cases}$$

Question 4 : En déduire une équation différentielle en $r = f(\alpha)$. Montrer que $r = \dfrac{a}{\sin(\alpha)} \left(\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)^{v/v_0}$ est la solution qui tient compte des conditions initiales. On notera, qu'à $t = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $r = a$.

Indication : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left[\ln\left(\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)\right] = \dfrac{1}{\sin(\alpha)}$

Question 5 : Quelle condition v et v_0 doivent-elles vérifier pour que le problème ait une solution ? Dans ce cas, quelle est la valeur finale de α ?

Question 6 : Écrire une équation différentielle vérifiée par $\alpha(t)$?

Question 7 : En déduire alors la durée τ de la poursuite, sachant que :

$$\int_{\alpha=0}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2(\alpha)} \left(\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^{\lambda} \mathrm{d}\alpha = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1}$$

Question 8 : **application numérique :** On prend $v_0 \approx 5{,}4\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $v \approx 21{,}6\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ et $a = 10\ \mathrm{m}$. Déterminer numériquement τ.

Question 9 : Dans les situations suivantes, donner la valeur de τ et interpréter :

1. $v_0 = 0$;
2. $v \gg v_0$;
3. $v \to v_0^+$;
4. $v = v_0$;
5. $v < v_0$.

Histoire des sciences : Ce type de problème est celui de la courbe de poursuite (ou radiodrome), étudiée notamment par Pierre Bouguer en 1732 (poursuite d'un navire), avec des précurseurs attribués à Léonard de Vinci.
Les travaux de Bouguer ont aussi porté sur la gravimétrie (mesure du champ de gravitation d'une montagne) et il a participé à la mission géodésique française envoyée au Pérou (actuel Équateur) en 1735 pour mesurer la longueur d'un degré de méridien près de l'équateur.