Devoir maison 1 pour le jeudi 8 octobre 2026

S. Benlhajlahsen

I Courbe du chien

Question 1 : Géométriquement, on peut affirmer que :

$$\overrightarrow{v} = v\cos(\alpha)\,\overrightarrow{u_x} + v\sin(\alpha)\,\overrightarrow{u_y}$$

Question 2 : Le vecteur $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y}$ vérifie $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$ avec $\overrightarrow{OA} = v_0 t\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{AM} = -r\cos(\alpha)\,\overrightarrow{u_x} - r\sin(\alpha)\,\overrightarrow{u_y}$. On en déduit alors :

$$\forall t \geqslant 0,\ \begin{cases} x &= v_0 t - r\cos(\alpha) \\ y &= -r\sin(\alpha) \end{cases}$$

Le vecteur vitesse est alors donné par :

$$\overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = [v_0 - \dot{r}\cos(\alpha) + r\dot{\alpha}\sin(\alpha)]\,\overrightarrow{u_x} + [-\dot{r}\sin(\alpha) - r\dot{\alpha}\cos(\alpha)]\,\overrightarrow{u_y}$$

Finalement,

$$\forall t \geqslant 0,\ \begin{cases} \dot{x} &= v_0 - \dot{r}\cos(\alpha) + r\dot{\alpha}\sin(\alpha) \\ \dot{y} &= -\dot{r}\sin(\alpha) - r\dot{\alpha}\cos(\alpha) \end{cases}$$

Question 3 : La comparaison de ces deux expressions nous donne :

$$\forall t \geqslant 0,\ \begin{cases} v\cos(\alpha) &= v_0 - \dot{r}\cos(\alpha) + r\dot{\alpha}\sin(\alpha) \\ v\sin(\alpha) &= -\dot{r}\sin(\alpha) - r\dot{\alpha}\cos(\alpha) \end{cases}$$

En multipliant par $\cos(\alpha)$ la première et par $\sin(\alpha)$ la deuxième puis la somme, on obtient

$$\dot{r} = v_0\cos(\alpha) - v$$

De même, en multipliant la première par $\sin(\alpha)$ et la deuxième par $\cos(\alpha)$ puis la différence, cela donne :

$$0 = v_0\sin(\alpha) + r\dot{\alpha}$$

Question 4 : En faisant le rapport des deux équations proposées, on obtient :

$$\frac{\dot{r}}{r\dot{\alpha}} = \frac{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}}{r\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}} = -\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{v}{v_0\sin(\alpha)}$$

puis,

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = -\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\mathrm{d}\alpha + \frac{v}{v_0}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sin(\alpha)}$$

puis, par intégration,

$$\ln(r) = -\ln(\sin(\alpha)) + \frac{v}{v_0}\ln\left(\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) + \text{cte}$$

Or, à $t = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $r = a$ donc cte $= \ln(a)$. Cela donne :

$$\begin{aligned}
\ln(r) &= -\ln(\sin(\alpha)) + \tfrac{v}{v_0}\ln\left(\tan\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\right) + \ln(a) \\
\ln(r) &= \ln\left(\tfrac{a}{\sin(\alpha)}\left(\tan\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\right)^{v/v_0}\right) \\
r &= \tfrac{a}{\sin(\alpha)}\left(\tan\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\right)^{v/v_0}
\end{aligned}$$

Ce qui est le résultat final.

Question 5 : Le chien rattrape son maître si $r = \left\|\overrightarrow{AM}\right\| \to 0$ soit $\lim_{\alpha\to 0} r = 0$. Or, pour $\alpha \approx 0$,

$$r \approx \frac{a}{2^{v/v_0}}\alpha^{\frac{v}{v_0}-1}$$

Ainsi, $r \to 0$ si $\frac{v}{v_0} - 1 > 0$ soit $v > v_0$ (le chien peut rattraper son maître s'il court plus vite que lui).

Question 6 : Connaissant l'expression du rayon avec α, on peut écrire :

$$\dot{\alpha} = -\frac{v_0\sin(\alpha)}{r} = -\frac{v_0}{a}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{v}{v_0}}}$$

Question 7 : La durée τ du parcours vaut alors :

$$\begin{aligned}
\tau &= \int_{t=0}^{\tau} \mathrm{d}t \\
&= \int_{\alpha=\pi/2}^{0} \frac{1}{\dot{\alpha}}\mathrm{d}\alpha \\
&= -\int_{\alpha=\pi/2}^{0} \frac{a}{v_0}\cdot\frac{\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{v}{v_0}}}{\sin^2\alpha}\mathrm{d}\alpha
\end{aligned}$$

Soit en prenant $\lambda = \frac{v}{v_0}$,

$$\tau = \frac{a}{v_0}\cdot\frac{\frac{v}{v_0}}{\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 - 1} = \frac{av}{v^2 - v_0^2}$$

Question 8 : On trouve $\tau \approx 1{,}8$ s.

Question 9 :

1. $v_0 = 0$ donne $\tau = \frac{a}{v}$. Le maître ne bouge pas et le chien remonte l'axe (Ox) sur une distance a selon un mouvement rectiligne uniforme.
2. $v \gg v_0$ donne $\tau \to a/v$ (le maître est quasi immobile).
3. $v \to v_0^+$ donne
4. $v = v_0$, $r \to a/2$, donc le chien reste indéfiniment à $a/2$ derrière son maître.
5. $v < v_0$ donne $r \to \infty$, le chien est distancé par son maître.