Devoir maison DM3- pour le Jeudi 12 novembre 2026

S. Benlhajlahsen → PCSI$_1$

Sommaire

I Deux corps, un ressort : de la mécanique du banc à la molécule HCl **1**

I Deux corps, un ressort : de la mécanique du banc à la molécule HCl

Contexte :
La molécule de chlorure d'hydrogène HCl a été identifiée par spectroscopie infrarouge dans l'atmosphère de Vénus, dans les panaches volcaniques et dans le milieu interstellaire. Son signal infrarouge repose sur un seul fait mécanique : les deux atomes **vibrent l'un par rapport à l'autre**, à une fréquence que l'on mesure avec une précision remarquable.
Un spectre infrarouge de HCl gazeux présente une raie intense autour de 2886 cm^{-1}. Chaque raie est un **doublet**, de rapport d'intensité d'environ 3 pour 1. De plus, la molécule deutérée DCl vibre à une fréquence nettement plus basse que HCl. La deuxième loi de Newton appliquée à deux corps permet de prévoir ces observations.
On procède en plusieurs temps :

- La partie A établit le résultat général sur un dispositif macroscopique : deux palets reliés par un ressort sur un banc à coussin d'air.
- La partie B transpose ce résultat à la molécule.
- La partie C, **facultative**, montre comment la force de rappel linéaire découle d'une loi de force réaliste.

Modélisation : On travaille dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_{\text{labo}}$, supposé galiléen. Deux points matériels M_1 et M_2, de masses m_1 et m_2, se déplacent sur l'axe (Ox) de vecteur unitaire $\overrightarrow{u_x}$ (voir figure 1). Leurs abscisses sont $x_1(t)$ et $x_2(t)$, avec $x_2 > x_1$. Ils sont reliés par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. On note $\ell = x_2 - x_1$ la longueur du ressort. Les frottements sont négligés, ainsi que la masse du ressort et les dimensions des palets.

Données :

- Unité de masse atomique : 1 u $= 1{,}66 \times 10^{-27}$ kg.
- Célérité de la lumière : $c = 3{,}00 \times 10^{8}$ m $\cdot$ s^{-1}.
- Masses atomiques : $m_{\text{H}} = 1{,}008$ u (hydrogène), $m_{\text{D}} = 2{,}014$ u (deutérium), $m_{35} = 34{,}97$ u (chlore 35), $m_{37} = 36{,}97$ u (chlore 37).
- Abondances naturelles du chlore : 75,8 % pour le chlore 35 et 24,2 % pour le chlore 37.
- Le **nombre d'onde** d'une oscillation de fréquence f est $\tilde{\sigma} = \dfrac{f}{c} = \dfrac{1}{\lambda}$, usuellement exprimé en cm^{-1}. Le tilde $\tilde{}$ le distingue des autres grandeurs notées σ.
- Nombre d'onde de vibration de H^{35}Cl dans le modèle harmonique, déduit des spectres : $\tilde{\sigma}_{\text{HCl}} = 2991$ cm^{-1}.
- Nombre d'onde mesuré pour D^{35}Cl dans le même modèle : $\tilde{\sigma}_{\text{DCl}} = 2145$ cm^{-1}.

I.A Deux palets sur un banc à coussin d'air

Deux palets, assimilés à deux points matériels M_1 et M_2, glissent sans frottement sur un banc à coussin d'air horizontal. Le poids de chaque palet est compensé par l'action du coussin d'air, et le mouvement a lieu selon (Ox) uniquement (figure 1).

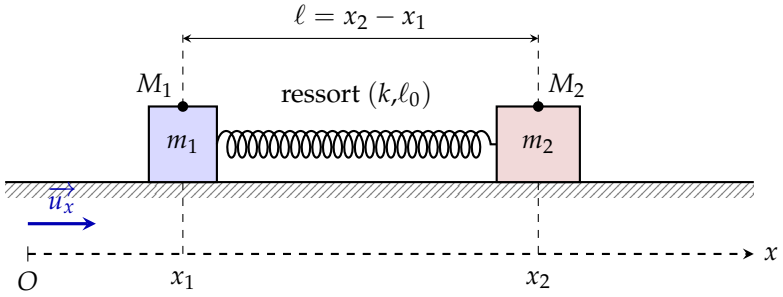


FIGURE 1 – Deux palets de masses m_1 et m_2 reliés par un ressort sur un banc à coussin d'air. On repère les points M_1 et M_2 par leurs abscisses x_1 et x_2 sur l'axe (Ox).

Question 1 : **(⋆)** Faire le bilan des forces sur M_1, puis sur M_2. Exprimer la force exercée par le ressort sur chaque point en fonction de k, ℓ, ℓ_0 et $\overrightarrow{u_x}$. Appliquer la deuxième loi de Newton à chaque point et projeter sur (Ox). On obtient deux équations différentielles couplées.

Question 2 : **(⋆)** On définit le centre d'inertie G par $(m_1 + m_2)\, x_G = m_1 x_1 + m_2 x_2$. Établir l'équation du mouvement de G. Quelle est la nature de ce mouvement ? Quelle propriété de l'interaction entre M_1 et M_2 intervient dans ce résultat ?

Question 3 : **(⋆⋆)** Établir l'équation différentielle vérifiée par $\ell(t)$. Montrer qu'elle s'écrit

$$\mu \frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}t^2} + k\,(\ell - \ell_0) = 0,$$

et exprimer la **masse réduite** μ en fonction de m_1 et m_2. En déduire la pulsation ω_0 et la période T_0 des oscillations de ℓ.

Question 4 : **(⋆⋆)** À $t = 0$, les deux points sont immobiles, $\ell(0) = \ell_0 + a$ avec $a > 0$, et $x_G(0) = 0$. Déterminer $\ell(t)$, puis $x_G(t)$. En déduire $x_1(t)$ et $x_2(t)$ en fonction de m_1, m_2, ℓ_0, a, ω_0 et t. Montrer que les deux points oscillent en opposition de phase et exprimer le rapport de leurs amplitudes.

Question 5 : **(⋆)** Applications numériques : $m_1 = 200$ g, $m_2 = 300$ g, $k = 12{,}0$ N · m^{-1}, $\ell_0 = 30{,}0$ cm et $a = 5{,}00$ cm.

a) Calculer μ et T_0.

b) La figure 2 représente $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_G(t)$ pour ces valeurs. Lire sur le graphique la période et le rapport des amplitudes des deux palets. Comparer aux prévisions des questions 3 et 4.

c) Que devient μ si $m_2 \gg m_1$? Si $m_1 = m_2$? Interpréter ces deux cas limites.

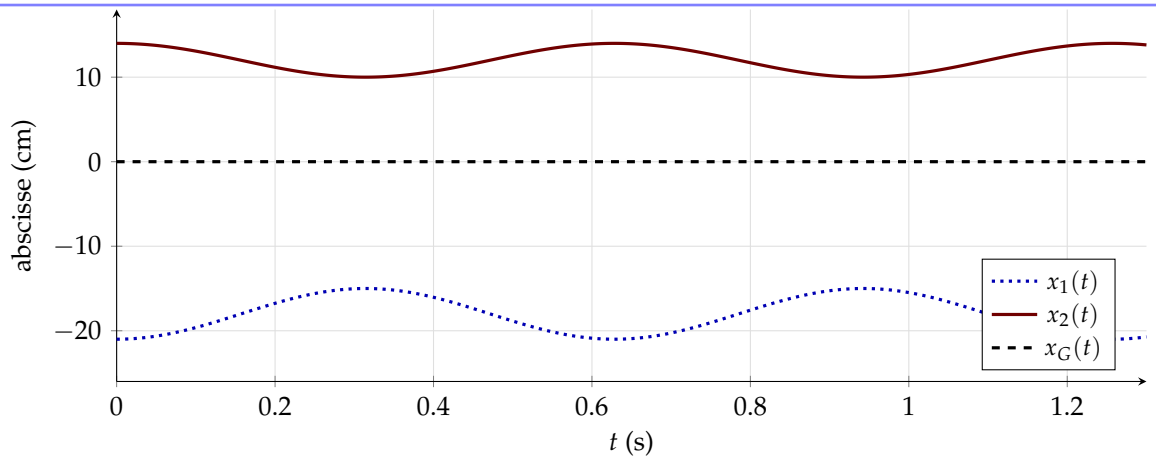


FIGURE 2 – Abscisses $x_1(t)$, $x_2(t)$ des deux palets et $x_G(t)$ du centre d'inertie, pour les valeurs de la question 5. L'axe est gradué en centimètres.

I.B La molécule HCl

On modélise HCl par deux points matériels, l'atome d'hydrogène M_1 (masse m_H) et l'atome de chlore M_2 (masse m_{Cl}) (figure 3). La liaison chimique est décrite par une force de rappel de la forme étudiée en partie A, de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. On néglige la rotation et on suppose les oscillations de faible amplitude. On conserve les notations de la partie A.

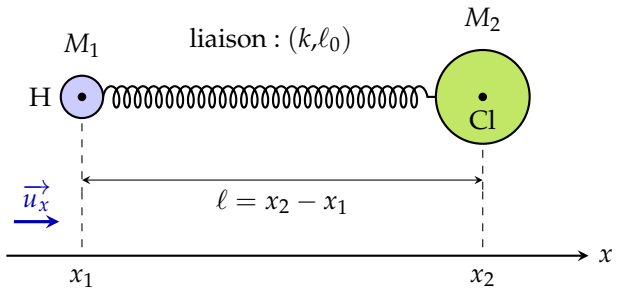


FIGURE 3 – Modèle de la molécule HCl : deux points matériels (l'atome d'hydrogène M_1, léger, et l'atome de chlore M_2, lourd) reliés par une force de rappel de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Le schéma n'est pas à l'échelle.

Question 6 : **(⋆⋆)** Transposer le résultat de la question 3. Exprimer ω_0, puis le nombre d'onde $\tilde{\sigma}$ en fonction de k, μ et c. Calculer μ_{HCl} pour $H^{35}Cl$, en u puis en kg. Comparer μ_{HCl} à m_H.

Question 7 : **(⋆⋆)** À partir de $\tilde{\sigma}_{HCl} = 2991\ \text{cm}^{-1}$, calculer la fréquence f, la pulsation ω_0, la période T_0 et la longueur d'onde $\lambda = 1/\tilde{\sigma}$. Dans quel domaine du spectre se trouve λ ? Déterminer la raideur k de la liaison. La comparer à celle du ressort de la question 5.

Question 8 : **(⋆⋆)** On suppose une amplitude d'oscillation de la longueur de la liaison $a = 1{,}0 \times 10^{-11}$ m, ce qui est de l'ordre de grandeur de l'amplitude de vibration de HCl. En repartant des résultats de la question 4, calculer le rapport des amplitudes de H et de Cl. Calculer la valeur maximale de la force de rappel, puis l'accélération maximale de chaque atome. Comparer l'accélération de H à $g = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. Quel atome est quasiment immobile dans le référentiel du centre d'inertie ? Justifier ainsi l'approximation $\mu_{HCl} \approx m_H$.

Question 9 : **(⋆⋆)** On compare $H^{35}Cl$ et $H^{37}Cl$. La force de liaison est d'origine électronique, donc identique pour les deux isotopes. En déduire que la raideur k est la même. Établir l'expression du rapport $\tilde{\sigma}_{37}/\tilde{\sigma}_{35}$ en fonction des masses réduites. Calculer ce rapport et le décalage $\tilde{\sigma}_{35} - \tilde{\sigma}_{37}$ en cm^{-1}. Montrer que cette prévision explique l'observation d'un doublet dans le spectre (figure 4). Que peut-on dire de l'intensité relative des deux composantes du doublet ?

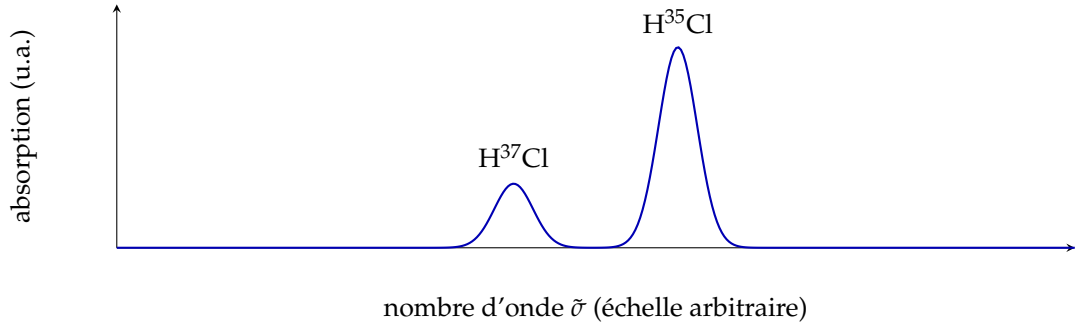


FIGURE 4 – Allure d'une raie de vibration de HCl gazeux avec les deux isotopes du chlore, aux abondances naturelles (schéma de principe : l'échelle horizontale et la largeur des raies ne sont pas respectées).

Question 10 : **(⋆⋆)** Dans le cas de la molécule deutérée $D^{35}Cl$, la raideur k est inchangée. Calculer μ_{DCl}, puis prévoir $\tilde{\sigma}_{DCl}$. Comparer à la valeur mesurée $2145\ \text{cm}^{-1}$ par l'écart relatif. Commenter l'accord. Pourquoi l'effet isotopique est-il beaucoup plus grand pour $H \to D$ que pour $^{35}Cl \to {}^{37}Cl$?

Question 11 : **(⋆⋆⋆)** La raie la plus intense observée expérimentalement est à 2886 cm^{-1}, soit environ 3,5 % en dessous de $\tilde{\sigma}_{\mathrm{HCl}}$. Calculer cet écart relatif. On interprète cet écart en remarquant que la force de rappel réelle n'est linéaire en $(\ell - \ell_0)$ que pour de petites amplitudes. Écrire le développement limité de la force autour de ℓ_0 à l'ordre 2. Dire quels termes sont négligés dans la partie A. Pourquoi la période d'un oscillateur non linéaire dépend-elle de l'amplitude, contrairement à celle de la question 3 ?

I.C Partie facultative : de la loi de force au ressort (potentiel de Lennard-Jones)

Dans les parties A et B, la force de rappel a été postulée linéaire. On montre ici comment ce résultat découle d'un modèle de force réaliste. Le modèle de **Lennard-Jones** décrit l'interaction de van der Waals entre deux atomes neutres, par exemple les deux atomes d'argon du dimère Ar_2. Cette molécule, observée à très basse température, est liée par une interaction beaucoup plus faible que la liaison de HCl.
Les deux atomes, de même masse m, sont assimilés à deux points matériels M_1 et M_2, et on conserve $\ell = x_2 - x_1$. L'interaction est décrite par la fonction

$$V(\ell) = \varepsilon \left[\left(\frac{\ell_0}{\ell} \right)^{12} - 2 \left(\frac{\ell_0}{\ell} \right)^{6} \right],$$

où $\varepsilon > 0$ et $\ell_0 > 0$ sont deux constantes. La force exercée par M_1 sur M_2 est $\overrightarrow{F}_{1\to 2} = f(\ell)\,\overrightarrow{u_x}$ avec $f(\ell) = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\ell}$, et celle exercée par M_2 sur M_1 vaut $-f(\ell)\,\overrightarrow{u_x}$. Seule la relation $f = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\ell}$ est utilisée : aucun bilan d'énergie n'est demandé. La figure 5 représente V et f.

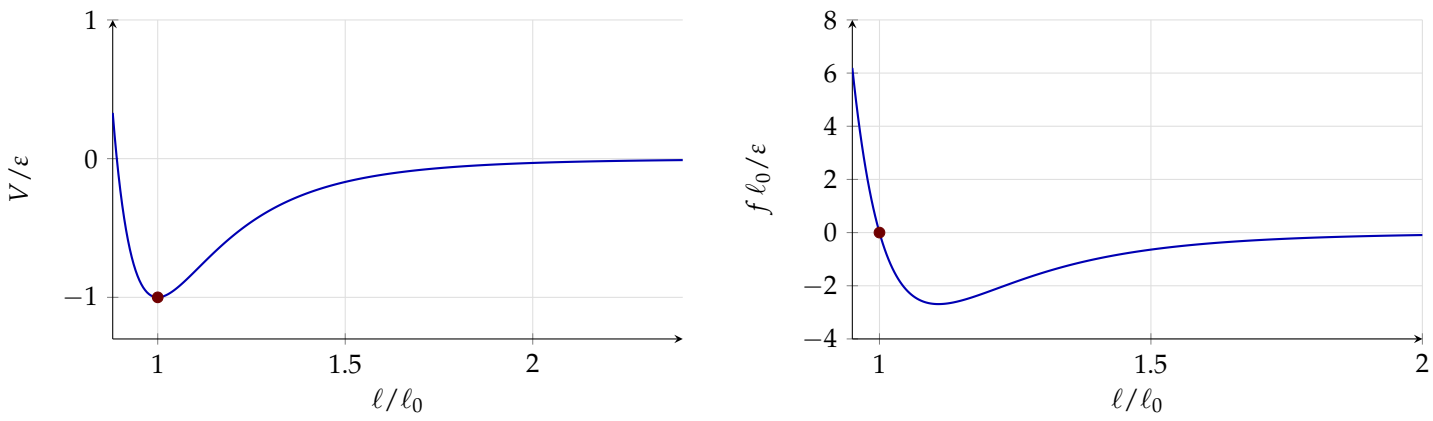


FIGURE 5 – Potentiel de Lennard-Jones $V(\ell)$ (à gauche) et force $f(\ell) = -\mathrm{d}V/\mathrm{d}\ell$ exercée par M_1 sur M_2 (à droite), en fonction de ℓ/ℓ_0. Le point rouge repère $\ell = \ell_0$.

Question 12 : **(⋆⋆)** Établir l'expression de $f(\ell)$. Montrer que $f(\ell_0) = 0$.
Étudier le signe de f pour $\ell < \ell_0$ et pour $\ell > \ell_0$, et interpréter chaque cas en termes de répulsion ou d'attraction.
En déduire que ℓ_0 est une position d'équilibre stable. Vérifier ces résultats sur la figure 5.

Question 13 : **(⋆⋆)** On écrit $\ell = \ell_0 + \delta$ avec $|\delta| \ll \ell_0$. Calculer $f'(\ell_0)$ et en déduire $f(\ell) \approx -k\,\delta$, avec k exprimée en fonction de ε et ℓ_0.
Retrouver ainsi l'équation $\mu \frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}t^2} + k\,(\ell - \ell_0) = 0$ de la question 3, avec $\mu = m/2$ pour deux atomes identiques. Exprimer ω_0 en fonction de ε, m et ℓ_0.

Question 14 : **(⋆⋆⋆)** On pose $\xi = \ell/\ell_0 - 1$. Les développements limités $(1+\xi)^{-13} \approx 1 - 13\xi + 91\xi^2$ et $(1+\xi)^{-7} \approx 1 - 7\xi + 28\xi^2$ donnent le développement de f à l'ordre 2 en ξ.

a) Établir ce développement. Retrouver le terme linéaire de la question 13.

b) Calculer le rapport entre le terme d'ordre 2 et le terme d'ordre 1. Pour quelle valeur de $|\xi|$ ce rapport vaut-il 10 % ? En déduire la condition de validité de la linéarisation pour cette loi de force.

Question 15 : **(⋆⋆)** Application au dimère d'argon Ar_2. Les valeurs expérimentales sont $\ell_0 = 3{,}76 \times 10^{-10}$ m pour la distance d'équilibre et $\varepsilon = 1{,}98 \times 10^{-21}$ J pour la profondeur du puits. La masse d'un atome d'argon est $m = 39{,}95$ u.

a) Calculer k, μ, puis le nombre d'onde de vibration $\tilde{\sigma}$ prévu par le modèle.

b) La spectroscopie de Ar_2 donne $\tilde{\sigma}_{exp} \approx 25{,}7\ cm^{-1}$. Calculer l'écart relatif et commenter. Le modèle de Lennard-Jones est-il quantitatif ?

c) Comparer k à la raideur de HCl (question 7) et à celle du ressort de la question 5. Que traduit cet écart sur la nature des deux liaisons ?