Devoir maison DM3_corrige- pour le Jeudi 12 novembre 2026

S. Benlhajlahsen → PCSI$_1$

Sommaire

I Deux corps, un ressort : de la mécanique du banc à la molécule HCl **1**

I Deux corps, un ressort : de la mécanique du banc à la molécule HCl

Récapitulatif des résultats

Q.	Résultat littéral	Application numérique
1	$m_1\ddot{x}_1 = k(\ell-\ell_0)\,;\, m_2\ddot{x}_2 = -k(\ell-\ell_0)$	–
2	$(m_1+m_2)\,\ddot{x}_G = 0$	mouvement rectiligne uniforme
3	$\mu\frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}t^2} + k(\ell-\ell_0) = 0\,;\, \mu = \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$	–
4	$x_1 = -\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\ell\,;\, x_2 = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\ell\,;\, \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{m_2}{m_1}$	–
5	$T_0 = 2\pi\sqrt{\mu/k}$	$\mu = 0{,}120$ kg ; $T_0 = 0{,}628$ s
6	$\tilde{\sigma} = \dfrac{1}{2\pi c}\sqrt{\dfrac{k}{\mu}}$	$\mu_{\mathrm{HCl}} = 1{,}63\times10^{-27}$ kg
7	$k = \mu\,\omega_0^2$	$\omega_0 = 5{,}64\times10^{14}$ rad $\cdot$ s^{-1} ; $k = 517$ N $\cdot$ m^{-1}
8	$\dfrac{A_{\mathrm{H}}}{A_{\mathrm{Cl}}} = \dfrac{m_{\mathrm{Cl}}}{m_{\mathrm{H}}}$	$34{,}7$; $F_{\max} = 5{,}2\times10^{-9}$ N ; $a_{\mathrm{H}} = 3{,}1\times10^{18}$ m $\cdot$ s^{-2}
9	$\dfrac{\tilde{\sigma}_{37}}{\tilde{\sigma}_{35}} = \sqrt{\dfrac{\mu_{35}}{\mu_{37}}}$	$0{,}99924$; décalage 2,27 cm^{-1}
10	$\tilde{\sigma}_{\mathrm{DCl}} = \tilde{\sigma}_{\mathrm{HCl}}\sqrt{\mu_{\mathrm{HCl}}/\mu_{\mathrm{DCl}}}$	2145 cm^{-1} ; écart 0,02 %
11	force non linéaire $\Rightarrow$ T dépend de a	écart 3,5 %
12	$f = \dfrac{12\varepsilon}{\ell_0}\left[(\ell_0/\ell)^{13} - (\ell_0/\ell)^7\right]$	$f(\ell_0) = 0$
13	$k = \dfrac{72\,\varepsilon}{\ell_0^2}\,;\, \omega_0 = \dfrac{12}{\ell_0}\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{m}}$	–
14	$f \approx -\dfrac{72\varepsilon}{\ell_0}\xi + \dfrac{756\varepsilon}{\ell_0}\xi^2\,;\, \lvert\xi\rvert \ll 0{,}1$	$\lvert\xi\rvert \approx 1$ % pour 10 %
15	$\tilde{\sigma} = \dfrac{1}{2\pi c}\sqrt{\dfrac{k}{\mu}}$	$k = 1{,}01$ N $\cdot$ m^{-1} ; $\tilde{\sigma} = 29{,}3$ cm^{-1} (+14 %)

Erreurs classiques

- Utiliser m_1 ou m_2 à la place de μ dans ω_0.
- Se tromper de signe : la force du ressort sur M_1 est $+k(\ell-\ell_0)\,\vec{u_x}$, sur M_2 elle vaut l'opposé.
- Oublier $\tilde{\sigma} = f/c$ et la conversion en cm^{-1} (1 m^{-1} $= 10^{-2}$ cm^{-1}).
- Croire que k dépend de l'isotope : elle ne dépend que des électrons.

I.A Deux palets sur un banc à coussin d'air

Question 1 : **Systèmes :** $\{M_1\}$ puis $\{M_2\}$, dans $\mathcal{R}_{\mathrm{labo}}$ galiléen.
Forces : le poids et la réaction du coussin d'air se compensent. Reste la force du ressort (figure 1) :

$$\vec{F}_{\mathrm{r}\to1} = +k\,(\ell-\ell_0)\,\vec{u_x} \qquad \text{et} \qquad \vec{F}_{\mathrm{r}\to2} = -k\,(\ell-\ell_0)\,\vec{u_x}.$$

Deuxième loi de Newton, projetée sur (Ox) :

$$\boxed{m_1\,\ddot{x}_1 = k\,(\ell - \ell_0) \qquad \text{et} \qquad m_2\,\ddot{x}_2 = -k\,(\ell - \ell_0)}$$

Remarque : Ressort étiré ($\ell > \ell_0$) : les palets se rapprochent. Ressort comprimé : ils s'écartent.

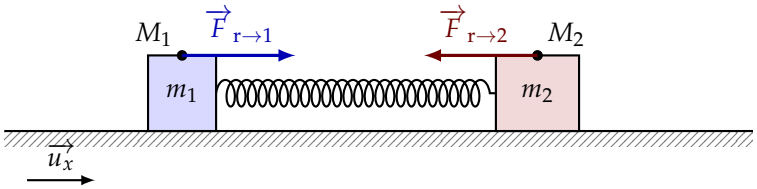


FIGURE 1 – Forces horizontales sur M_1 et M_2 pour un ressort étiré ($\ell > \ell_0$) : $\overrightarrow{F}_{r\to1} = +k(\ell - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{F}_{r\to2} = -k(\ell - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x}$. Le poids et la réaction du coussin d'air se compensent : ils ne sont pas représentés.

Question 2 : On somme les deux équations de la question 1 :

$$\boxed{(m_1 + m_2)\,\ddot{x}_G = 0}$$

La vitesse de G est constante : le mouvement est **rectiligne uniforme**. La troisième loi de Newton l'explique : les forces intérieures sont opposées.

Remarque : Le ressort n'agit pas sur G. Il agit seulement sur le mouvement relatif de M_1 et M_2 par rapport à G.

Question 3 : On forme $\frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$:

$$\frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}t^2} = -k\,(\ell - \ell_0)\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right).$$

On pose $\dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}$. D'où

$$\boxed{\mu\,\frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}t^2} + k\,(\ell - \ell_0) = 0 \qquad \text{avec} \qquad \mu = \frac{m_1\,m_2}{m_1 + m_2}}$$

Homogénéité : $\mu\frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}t^2}$ et $k(\ell - \ell_0)$ sont des forces, en newtons. L'équation est celle d'un oscillateur harmonique :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \qquad \text{et} \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}}$$

Remarque : Tout se passe comme si une masse $\mu < \min(m_1, m_2)$ oscillait au bout d'un ressort fixe.

Question 4 : **Mouvement relatif :** $\ell(0) = \ell_0 + a$ et $\dot{\ell}(0) = 0$ donnent

$$\boxed{\ell(t) = \ell_0 + a\cos\omega_0 t}$$

Centre d'inertie : $\ddot{x}_G = 0$, $\dot{x}_G(0) = 0$ et $x_G(0) = 0$. Donc $x_G(t) = 0$.
Positions : on résout $m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$ et $x_2 - x_1 = \ell$:

$$\boxed{x_1(t) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\,(\ell_0 + a\cos\omega_0 t) \qquad \text{et} \qquad x_2(t) = +\frac{m_1}{m_1 + m_2}\,(\ell_0 + a\cos\omega_0 t)}$$

Les parties oscillantes sont de signes opposés : **opposition de phase**. Les amplitudes sont $A_1 = \dfrac{m_2\,a}{m_1 + m_2}$ et $A_2 =$

$\frac{m_1 a}{m_1 + m_2}$, d'où

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{m_2}{m_1}}$$

Remarque : On a $m_1 A_1 = m_2 A_2$: la quantité de mouvement totale est nulle. Le palet léger bouge le plus.

Question 5 : **a)** $\mu = \dfrac{0{,}200 \times 0{,}300}{0{,}500} = \boxed{0{,}120\ \text{kg}}$ et $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{0{,}120}{12{,}0}} = \boxed{0{,}628\ \text{s}}$.
b) Sur la figure 2 de l'énoncé, deux périodes occupent environ 1,26 s : $T_0 \approx 0{,}63$ s. Les amplitudes lues sont $A_1 \approx 3$ cm et $A_2 \approx 2$ cm, soit un rapport $1{,}5 = m_2/m_1$. Le calcul de la question 4 donne $A_1 = 3{,}00$ cm et $A_2 = 2{,}00$ cm : l'accord est bon.
c) Cas limites :

- $m_2 \gg m_1$: $\mu \to m_1$. Le palet lourd est immobile : on retrouve un palet au bout d'un ressort fixe.
- $m_1 = m_2 = m$: $\mu = m/2$ et $A_1 = A_2 = a/2$.

Remarque : La masse réduite tend vers la plus petite masse si les masses sont très différentes. Ce point sert aux questions 6 et 8.

I.B La molécule HCl

Question 6 : **Transposition :** on remplace $m_1 \to m_\text{H}$ et $m_2 \to m_\text{Cl}$ dans la question 3 :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \qquad \text{et} \qquad \tilde{\sigma} = \frac{f}{c} = \frac{\omega_0}{2\pi c} = \frac{1}{2\pi c}\sqrt{\frac{k}{\mu}}}$$

Masse réduite de $H^{35}Cl$:

$$\mu_\text{HCl} = \frac{1{,}008 \times 34{,}97}{1{,}008 + 34{,}97} = 0{,}980\ \text{u} = \boxed{1{,}63 \times 10^{-27}\ \text{kg}}$$

Comparaison : $\mu_\text{HCl}/m_\text{H} = 0{,}972$. La masse réduite est 2,8 % sous m_H.

Remarque : C'est le cas limite $m_2 \gg m_1$ de la question 5.c : l'atome léger domine.

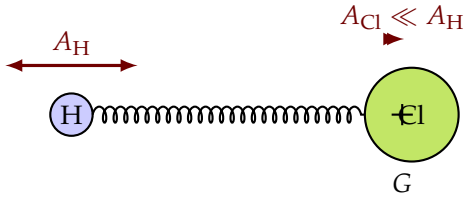


FIGURE 2 – Amplitudes de H et de Cl autour du centre d'inertie G, à l'échelle (rapport 34,7). G est presque confondu avec le centre de l'atome de chlore.

Question 7 :

$$f = c\,\tilde{\sigma} = 3{,}00 \times 10^8 \times 2{,}991 \times 10^5 = \boxed{8{,}97 \times 10^{13}\ \text{Hz}} \qquad T_0 = \frac{1}{f} = \boxed{1{,}11 \times 10^{-14}\ \text{s}}$$

$$\omega_0 = 2\pi f = \boxed{5{,}64 \times 10^{14}\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}} \qquad \lambda = \frac{1}{\tilde{\sigma}} = \boxed{3{,}34 \times 10^{-6}\ \text{m}} \quad \text{(infrarouge)}$$

$$k = \mu_\text{HCl}\,\omega_0^2 = 1{,}63 \times 10^{-27} \times \left(5{,}64 \times 10^{14}\right)^2 = \boxed{517\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}}$$

Remarque : k vaut environ 43 fois la raideur du banc ($12\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$). La liaison est très raide, mais μ est minuscule : la fréquence est très élevée.

Question 8 : **Amplitudes :** $A_H/A_{Cl} = m_{Cl}/m_H = 34{,}97/1{,}008 = \boxed{34{,}7}$.
Force maximale : elle est atteinte pour $|\ell - \ell_0| = a$:

$$F_{max} = k\,a = 517 \times 1{,}0 \times 10^{-11} = \boxed{5{,}2 \times 10^{-9}\ \text{N}}$$

Accélérations maximales (deuxième loi ; $m_H = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg, $m_{Cl} = 5{,}81 \times 10^{-26}$ kg) :

$$a_H = \frac{F_{max}}{m_H} = \boxed{3{,}1 \times 10^{18}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}} \qquad a_{Cl} = \frac{F_{max}}{m_{Cl}} = \boxed{8{,}9 \times 10^{16}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$$

On a $a_H/g \approx 3 \times 10^{17}$.
Conclusion : $A_{Cl} = 0{,}028\,a$. Le chlore est quasi immobile et G est presque sur Cl (figure 2). H oscille seul, comme sur un ressort fixé à un mur : $\mu \approx m_H$.

Remarque : Les accélérations sont dans le rapport m_{Cl}/m_H, comme les amplitudes. L'amplitude a est fixée par la mécanique quantique : la valeur prise est un ordre de grandeur.

Question 9 : **Même raideur :** la force est d'origine électronique. Elle ne dépend pas de la masse du noyau.
Rapport : à k fixé, $\tilde{\sigma} \propto \mu^{-1/2}$. Donc

$$\boxed{\frac{\tilde{\sigma}_{37}}{\tilde{\sigma}_{35}} = \sqrt{\frac{\mu_{35}}{\mu_{37}}}}$$

On a $\mu_{35} = 0{,}9798$ u et $\mu_{37} = \dfrac{1{,}008 \times 36{,}97}{37{,}978} = 0{,}9812$ u. Alors

$$\frac{\tilde{\sigma}_{37}}{\tilde{\sigma}_{35}} = \boxed{0{,}99924} \qquad \tilde{\sigma}_{35} - \tilde{\sigma}_{37} = 2991 \times 7{,}6 \times 10^{-4} = \boxed{2{,}27\ \text{cm}^{-1}}$$

Doublet : chaque isotopologue donne sa raie. $H^{37}Cl$ est du côté des petits nombres d'onde.
Intensités : elles suivent les abondances, $75{,}8/24{,}2 = 3{,}1$. On retrouve le rapport 3 pour 1.

Remarque : Le décalage vaut 0,08 %. Il est mesurable : la résolution des spectromètres est bien meilleure que 1 cm^{-1}.

Question 10 :

$$\mu_{DCl} = \frac{2{,}014 \times 34{,}97}{2{,}014 + 34{,}97} = \boxed{1{,}904\ \text{u}} \qquad \tilde{\sigma}_{DCl} = 2991\sqrt{\frac{0{,}9798}{1{,}904}} = \boxed{2145\ \text{cm}^{-1}}$$

L'écart relatif avec la mesure est $\boxed{0{,}02\ \%}$.
Effet plus grand pour H $\to$ D : pour $m_2 \gg m_1$, $\mu \approx m_1$. Passer de H à D double presque μ. Passer de ^{35}Cl à ^{37}Cl change m_2 de 5,7 % et μ de 0,15 % seulement : $\dfrac{\mathrm{d}\mu/\mu}{\mathrm{d}m_2/m_2} = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} = 0{,}028$.

Remarque : L'accord à 0,02 % valide l'hypothèse d'un même k. Le modèle n'a qu'un paramètre ajusté.

Question 11 : **Écart :** $\dfrac{2991 - 2886}{2991} = \boxed{3{,}5\ \%}$.
Développement à l'ordre 2 :

$$f(\ell) \approx -k\,(\ell - \ell_0) + \frac{1}{2} f''(\ell_0)\,(\ell - \ell_0)^2.$$

La partie I néglige le terme quadratique et les suivants.
Période : la raideur effective $-f(\ell)/(\ell - \ell_0)$ dépend de l'amplitude. La période en dépend donc. Si f est linéaire, T_0 ne dépend pas de a (isochronisme).

Remarque : Pour $\ell > \ell_0$, la force réelle est plus faible que la force linéaire : la liaison peut se rompre (figure 6 de l'énoncé). La raideur effective baisse avec l'amplitude, donc la fréquence aussi. C'est cohérent avec $2886 < 2991$ cm^{-1}.

I.C Partie facultative : de la loi de force au ressort (potentiel de Lennard-Jones)

Question 12 : **Force :** on dérive $V(\ell) = \varepsilon\left[\ell_0^{12}\ell^{-12} - 2\ell_0^6\ell^{-6}\right]$:

$$f(\ell) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\ell} = \boxed{\frac{12\,\varepsilon}{\ell_0}\left[\left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^{13} - \left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^{7}\right]}$$

Équilibre : pour $\ell = \ell_0$, les deux termes valent 1. Donc $\boxed{f(\ell_0) = 0}$.
Signe :

- $\ell < \ell_0$: la puissance 13 domine, $f > 0$. M_1 repousse M_2 : **répulsion**.
- $\ell > \ell_0$: la puissance 7 domine, $f < 0$. M_1 attire M_2 : **attraction**.

Dans les deux cas, la force pousse vers ℓ_0 : l'équilibre est **stable**.

Remarque : La figure 5 de l'énoncé confirme ces signes. f passe par un minimum voisin de $-2{,}7\,\varepsilon/\ell_0$, vers $\ell \approx 1{,}1\,\ell_0$.

Question 13 : **Dérivée :**

$$f'(\ell) = \frac{12\,\varepsilon}{\ell_0}\left[-13\,\frac{\ell_0^{13}}{\ell^{14}} + 7\,\frac{\ell_0^7}{\ell^8}\right] \quad\Longrightarrow\quad f'(\ell_0) = \frac{12\,\varepsilon}{\ell_0^2}\,(-13+7) = -\frac{72\,\varepsilon}{\ell_0^2}.$$

Force linéarisée : avec $\delta = \ell - \ell_0$, $f \approx f'(\ell_0)\,\delta$, soit

$$f \approx -k\,\delta \qquad \text{avec} \qquad \boxed{k = \frac{72\,\varepsilon}{\ell_0^2}}$$

Homogénéité : $\mathrm{J}\cdot\mathrm{m}^{-2} = \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.
Équation du mouvement : la deuxième loi redonne les équations de la question 1. La question 3 s'applique avec $m_1 = m_2 = m$, donc $\mu = m/2$:

$$\mu\,\frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}t^2} + k\,(\ell - \ell_0) = 0 \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \frac{12}{\ell_0}\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}}$$

Remarque : On retrouve la forme postulée dans les parties I et II. Le ressort est le premier terme du développement de la force. k est la pente de f en ℓ_0.

Question 14 : **a)** On a $(\ell_0/\ell)^{13} = (1+\xi)^{-13}$ et $(\ell_0/\ell)^7 = (1+\xi)^{-7}$. Alors

$$f \approx \frac{12\,\varepsilon}{\ell_0}\left[(1 - 13\xi + 91\xi^2) - (1 - 7\xi + 28\xi^2)\right] = \frac{12\,\varepsilon}{\ell_0}\left(-6\xi + 63\xi^2\right),$$

soit

$$\boxed{f \approx -\frac{72\,\varepsilon}{\ell_0}\,\xi + \frac{756\,\varepsilon}{\ell_0}\,\xi^2}$$

Le terme linéaire est $-\dfrac{72\,\varepsilon}{\ell_0^2}\,(\ell - \ell_0) = -k\,(\ell - \ell_0)$: on retrouve la question 13.
b) Le rapport vaut

$$\left|\frac{\text{terme d'ordre 2}}{\text{terme d'ordre 1}}\right| = \frac{756\,\xi^2}{72\,|\xi|} = 10{,}5\,|\xi|.$$

Il vaut 10 % pour $|\xi| = 0{,}1/10{,}5 \approx 1$ %. La condition de validité est

$$\boxed{|\xi| \ll \frac{1}{10{,}5} \approx 0{,}1}$$

Il faut $|\ell - \ell_0| \lesssim 1\,\%\,\ell_0$ pour une force linéaire exacte à 10 % près.

Remarque : La figure 6 de l'énoncé montre l'écart dès quelques pour cent. La loi est très asymétrique : mur répulsif raide, puits attractif large.

Question 15 : **a)**

$$k = \frac{72 \times 1{,}98 \times 10^{-21}}{(3{,}76 \times 10^{-10})^2} = \boxed{1{,}01\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}} \qquad \mu = \frac{m}{2} = \frac{39{,}95 \times 1{,}66 \times 10^{-27}}{2} = \boxed{3{,}32 \times 10^{-26}\ \mathrm{kg}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = 5{,}51 \times 10^{12}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}} \qquad \tilde{\sigma} = \frac{\omega_0}{2\pi c} = \boxed{29{,}3\ \mathrm{cm^{-1}}}$$

b) L'écart relatif avec $25{,}7\ \mathrm{cm^{-1}}$ est $\dfrac{29{,}3 - 25{,}7}{25{,}7} = \boxed{+14\ \%}$. Le modèle est **qualitatif**. Le puits est peu profond : les vibrations atteignent la zone non linéaire (question 14), où la fréquence est plus basse que celle du modèle harmonique.
c) On a $k_{\mathrm{HCl}}/k_{\mathrm{Ar_2}} \approx 5 \times 10^2$. Le ressort du banc est 12 fois plus raide que $\mathrm{Ar_2}$.

Remarque : HCl est une liaison covalente : les électrons sont partagés, la liaison est raide. $\mathrm{Ar_2}$ est une liaison de van der Waals : elle est très faible et n'existe qu'à très basse température.